Calculabilité et Logique

TD3 – Indécidabilité, réductions

1 octobre 2008

Exercice 1 – *Problème de Post*

Considérons la machine de Turing $M = (Q, q_0, \Sigma, \delta, \{B, \$\})$ où :

$$\begin{cases} Q = \{q_0, q_1\} \\ \Sigma = \{1, B, \$\} \end{cases}$$

et la fonction de transition δ est définie par le tableau suivant (un $-$ signifie que la fonction de transition n'est pas définie) :

	$\$$	1	B
q_0	$(q_1, \$, \rightarrow)$	$-$	$-$
q_1	$-$	$-$	$($**accept**$, 1, \rightarrow)$

1. En suivant la réduction vue en cours, construire pour M une instance du problème de Post contraint.

2. Démontrer que cette instance du problème de Post admet une solution.

Exercice 2 – *Variantes du problème de l'arrêt*

On rappelle que le langage $L_{arret} = \{<M, w> \mid$ la machine de Turing M s'arrête sur le mot $w\}$ n'est pas récursif. Montrer (sans utiliser le théorème de Rice) que les problèmes suivants sont indécidables :

1. le problème de déterminer si une machine de Turing s'arrête sur le mot vide ;

2. le problème de déterminer si une machine de Turing s'arrête sur au moins un mot d'entrée ;

Exercice 3 – *Variantes sur les langages*

Dans cet exercice, on suppose donné un alphabet Σ, et on note R (resp. RE) l'ensemble des langages récursifs (resp. récursivement énumérables) sur Σ. On considère l'ensemble des propriétés suivantes : $\mathit{Prop} = \{= \emptyset,\ \neq \emptyset,\ \in R,\ \notin R,\ \in RE,\ \notin RE,\ \text{fini},\ \text{infini}\}$. Étant donné $\mathcal{P} \in \mathit{Prop}$, on définit le langage $L_{\mathcal{P}} = \{<M> \mid L(M)$ vérifie $\mathcal{P}\}$. Par exemple, $L_{=\emptyset}$ est l'ensemble des codes des machines de Turing dont le langage est vide. Repondre aux questions suivantes sans utiliser le théorème de Rice :

1. Pour tout $\mathcal{P} \in$ *Prop*, $L_{\mathcal{P}}$ est-il récursif ? récursivement énumérable ?

2. Même question pour $L_{egalite} = \{< M_1, M_2 >| \; L(M_1) = L(M_2)\}$.

Exercice 4 – *Machines linéairement bornées*

Une *machine linéairement bornée* est une machine de Turing dont l'espace de travail est limité à droite par l'extrémité du mot d'entrée.

1. Montrer que le problème suivant est décidable :

Donnée : Un automate linéairement borné M, un mot w.

Question : Est-ce que M s'arrête sur w ?

2. Montrer que le problème suivant est indécidable :

Donnée : Un automate linéairement borné M.

Question : Est-ce que $L(M) = \emptyset$?

Exercice 5 – *Théorème du point fixe*

Soit f une fonction récursive qui envoie les (codes de) machines de Turing sur des (codes de) machines de Turing. Par abus de notation, on identifie une machine et son code.

Montrer qu'il existe une machine M_0 telle que, pour toute donnée x, $f(M_0)(x) = M_0(x)$.