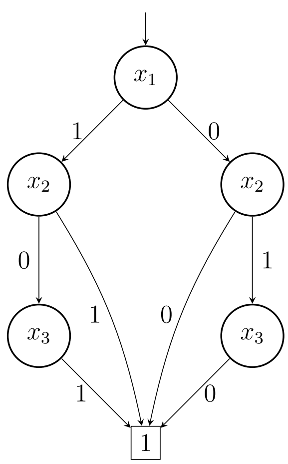
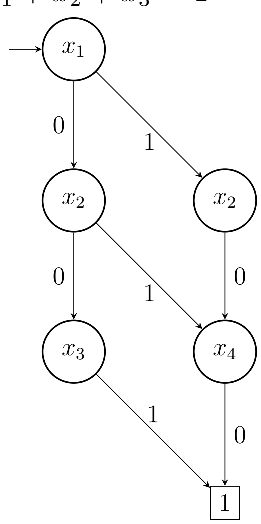
Concepts et Model Checking – TD 4 – Solutions

Question 1 – Calcul de BDDs

(a) $(x_1 \leftrightarrow x_2) \vee (x_1 \leftrightarrow x_3)$

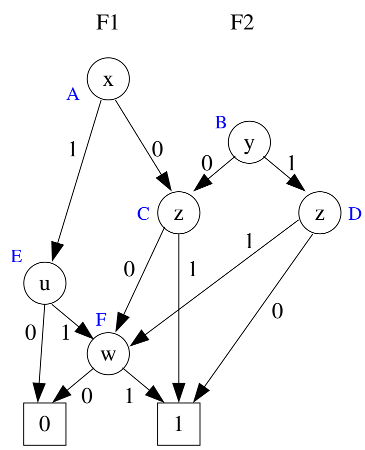


(b) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

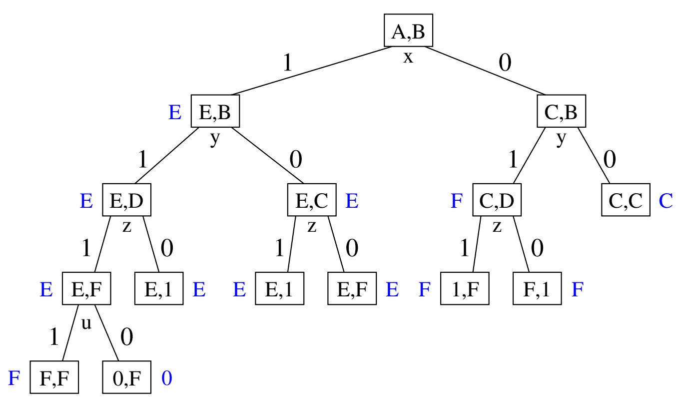


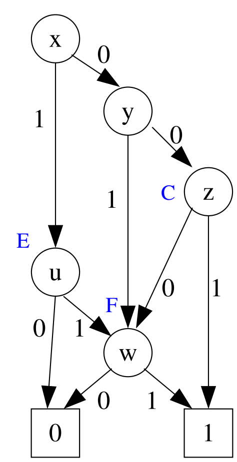
Question 2 – Opérations logiques

(a) Pour F_1, notons que $F_1[x/1] = u \wedge w$ and $F_1[x/0] = w \vee z$. Dans le dessin ci-dessous, les sous-graphes communs entre F_1 et F_2 sont déjà partagés.



(b) Voici une représentation du fonctionnement de l'algorithme recursif. Chaque boîte représente un sous-problème avec une paire des sommets de (a). Le résultat de tout sous-problème est noté à côté de chaque boîte (dans la mesure où il correspond à un sommet déjà connu).



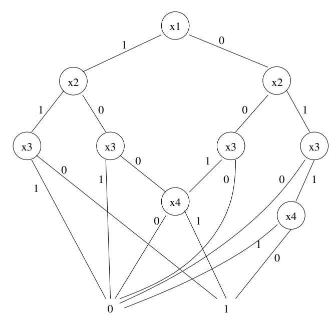


Question 3 Nombre de BDD différents

(a) En général, pour n variables booléennes, il existent $2^{(2^n)}$ fonctions différentes (nombre de différentes tables de vérité avec n variables), du coup 16 pour $n = 2$.

(b) Parmi les 16 fonctions, il y en a deux BDD de taille 0 (les deux constantes), 4 de taille 1 (x_1, $\neg x_1$, x_2, $\neg x_2$), deux de taille 3 ($x_1 \leftrightarrow x_2$, $x_1 \oplus x_2$), et les 8 autres sont de taille 2.

(c) On peut avoir au plus un sommet avec x_1, deux avec x_2 et quatre avec x_3. Le nombre de sommets étiquetés par x_4 est de deux car leurs arêtes sortantes doivent mener à deux feuilles distinctes parmi 1 et 0. Le dessin illustre un BDD possible avec un nombre maximal de sommets.



(d) Avec cinq ou six variables, le nombre de sommets pour la dernière variable reste à deux, appellons ces sommets a et b, respectivement. Pour la variable précédente, on a au plus $4 \cdot 3 = 12$ sommets ; quatre choix pour l'arête sortante étiquetée par 1 $(a, b, 1, 0)$, et les trois choix restants pour l'autre arête.

Du coup, avec cinq variables, on a au plus $1+2+4+8+2 = 17$ sommets (autre que les feuilles), et pour six variables $1+2+4+8+12+2 = 29$.

(e) En général, le nombre de sommets étiquetés par x_i est limité par deux facteurs indépendants :
- Le nombre de sommets accessibles depuis la racine, qui est de 2^{i-1}.
- Le nombre de différentes fonctions booléennes expressibles avec les variables $x_i, \ldots, x_n$, et dans lesquelles x_i est non-redondant. On rappelle qu'avec k variables booléennes on peut exprimer 2^{2^k} fonctions booléennes différentes. Il en faut déduire les fonctions dans lesquelles x_i est redondant, ce qui correspond aux fonctions expressibles avec seulement $x_{i+1}, \ldots, x_n$. Du coup ce nombre est de $2^{2^{n-i+1}} - 2^{2^{n-i}}$.

Du coup en général $N_i^n = \min\{2^{i-1}, 2^{2^{n-i+1}} - 2^{2^{n-i}}\}$. On vérifie que ces calculs correspondent aux chiffres dans (a) et (b) pour chaque variable.