Examen – Concepts et Model-Checking

3 mars 2025

1 LTL et Automates de Büchi

Soit $AP = \{p, q\}$. Pour les paires ϕ_1, ϕ_2 de formules suivantes, résoudre ces questions :

- Donner des automates de Büchi pour ϕ_1 et pour ϕ_2. (Un automate ad-hoc suffit. L'utilisation de la construction systématique montrée en cours n'est ni exigée ni recommandée.)
- Est-ce que ϕ_1 implique ϕ_2 ? Si ce n'est pas le cas, donner un mot infini sur 2^{AP} qui satisfait ϕ_1 mais pas ϕ_2.
- La même question avec les rôles de ϕ_1 et ϕ_2 inversés.

(a) $\phi_1 = \mathbf{F}\,(p \rightarrow \mathbf{F}\,q)$ et $\phi_2 = (\mathbf{F}\,p) \rightarrow (\mathbf{F}\,q)$;

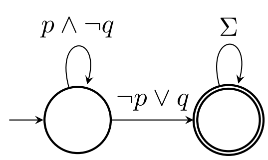
Solution : Avec les lois d'équivalence et idempotence, on obtient

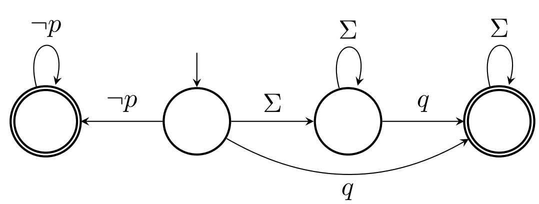
$$\mathbf{F}\,(p \rightarrow \mathbf{F}\,q) \equiv \mathbf{F}\,(\neg p \vee \mathbf{F}\,q) \equiv (\mathbf{F}\,\neg p) \vee (\mathbf{F}\,q) \equiv \mathbf{F}\,(\neg p \vee q)$$

et

$$(\mathbf{F}\,p) \rightarrow (\mathbf{F}\,q) \equiv \neg(\mathbf{F}\,p) \vee (\mathbf{F}\,q) \equiv (\mathbf{G}\,\neg p) \vee (\mathbf{F}\,q)$$

ce qui justifie les automates suivants:



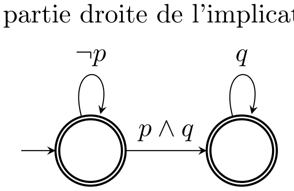


ϕ_1 n'implique pas ϕ_2 car $\{p\}\emptyset^\omega$ est modèle de ϕ_1 mais pas de ϕ_2.

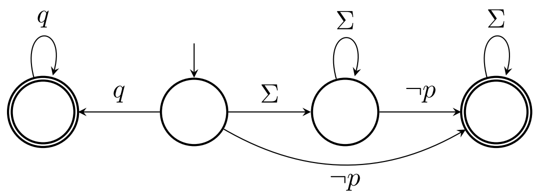
Par contre ϕ_2 implique bien ϕ_1: tout modèle de ϕ_2 satisfait soit $\mathbf{G}\,\neg p$ ce qui implique $\mathbf{F}\,\neg p$, soit $\mathbf{F}\,q$, et on sait que $\phi_1 \equiv \mathbf{F}\,\neg p \vee \mathbf{F}\,q$.

(b) $\phi_1 = \mathbf{G}\,(p \rightarrow \mathbf{G}\,q)$ et $\phi_2 = (\mathbf{G}\,p) \rightarrow (\mathbf{G}\,q)$.

Solution : Pour ϕ_1, soit p ne tient jamais (alors la partie gauche de l'implication est toujours vraie), ou la première fois qu'on a p on a aussi $\mathbf{G}\,q$, et à partir de ce moment la partie droite de l'implication est toujours vraie.



On a $(\mathbf{G}\,p) \rightarrow (\mathbf{G}\,q) \equiv \neg(\mathbf{G}\,p) \vee (\mathbf{G}\,q) \equiv (\mathbf{F}\,\neg p) \vee (\mathbf{G}\,q)$:



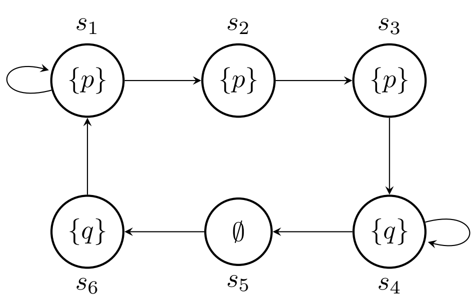
ϕ_1 implique bien ϕ_2. Tout suffixe d'un mot infini satisfaisant ϕ_1 doit satisfaire $\neg p \vee \mathbf{G}\,q$, dont notamment le mot entier; du coup soit la première lettre ne contient pas p (on satisfait alors $\mathbf{F}\,\neg p$), soit $\mathbf{G}\,q$ est satisfait.

ϕ_2 n'implique pas ϕ_1 car $\{p\}\emptyset^\omega$ est modèle de ϕ_2 mais pas de ϕ_1.

2 CTL

(a) Pour la structure ci-dessous, déterminer les états satisfaisant ces formules: [3]

- $\phi_1 = q\,\mathbf{EU}\,p$
- $\phi_2 = \mathbf{EG}\,(q\,\mathbf{EU}\,p)$
- $\phi_3 = \mathbf{AX}\,(p\,\mathbf{AU}\,q)$



Solution :

i. $[\![\phi_1]\!] = \{s_1, s_2, s_3, s_6\}$

ii. $[\![\phi_2]\!] = \{s_1, s_6\}$

iii. $[\![p\,\mathbf{AU}\,q]\!] = \{s_2, s_3, s_4, s_6\}$, du coup $[\![\phi_3]\!] = \{s_2, s_3\}$

(b) On considère les formules suivantes:

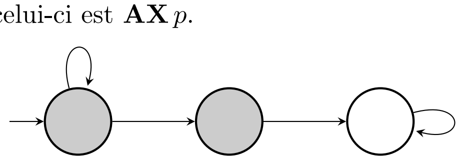
$$\phi = \mathbf{EG}\,\mathbf{AX}\,p \qquad \psi = \mathbf{AX}\,\mathbf{EG}\,p \qquad \chi = \mathbf{EX}\,\mathbf{AG}\,p$$

Dans les cas suivants, trouver une structure qui falsifie l'implication, c'est à dire qui satisfait la première formule mais pas la seconde. [4]

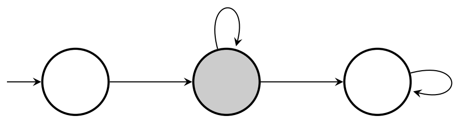
(i) $\phi \Rightarrow \psi$, (ii) $\psi \Rightarrow \phi$, (iii) $\phi \Rightarrow \chi$, (iv) $\chi \Rightarrow \phi$

Solution :

(a) La structure ci-dessous, respectivement son état initial, satisfait ϕ mais pas ψ (si les états foncés satisfont p). Notons qu'on peut rester dans l'état initial à jamais et que celui-ci est $\mathbf{AX}\,p$.

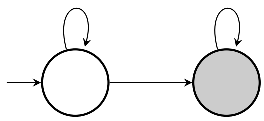


(b) L'état initial de la structure ci-dessous satisfait ψ mais pas ϕ.



(c) Même exemple que dans i.

(d) Le second état est $\mathbf{AG}\,p$, mais le premier n'est pas $\mathbf{AX}\,p$.

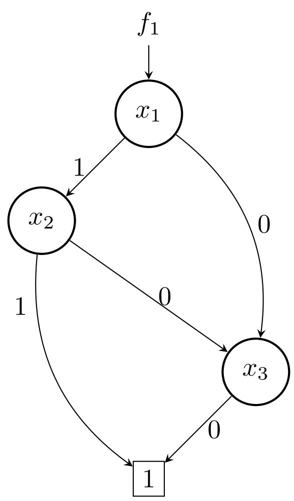


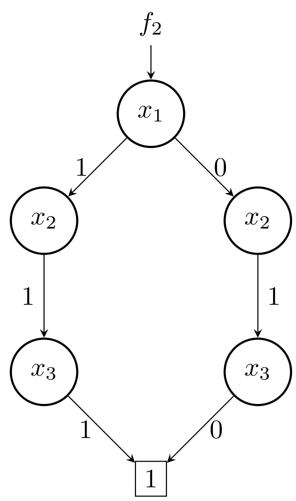
3 Diagrammes de décision binaires

Soient $V := \{x_1, x_2, x_3\}$ des variables booléennes avec l'ordre $x_1 \prec x_2 \prec x_3$.

(a) Donner les BDD de $f_1 = x_3 \rightarrow (x_1 \wedge x_2)$ et $f_2 = (x_1 \leftrightarrow x_3) \wedge x_2$.

Solution :

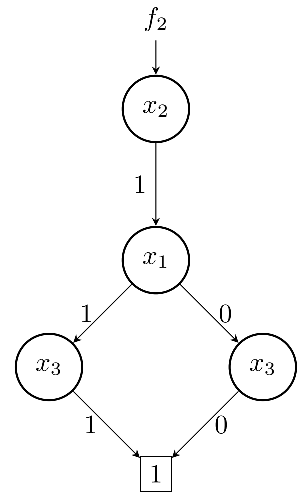




(b) Pour f_1 et f_2, existe-il un ordre différent qui donne un BDD avec moins de sommets ?

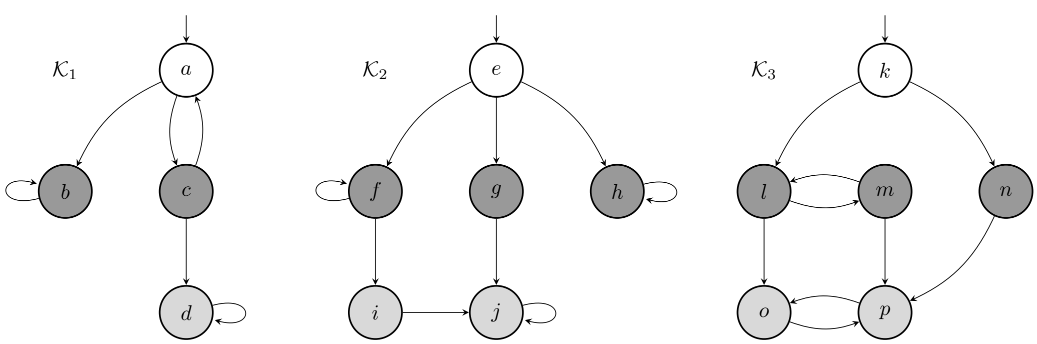
Solution : Non pour f_1 car le diagramme dans (a) contient un seul sommet par variable. Un diagramme plus petit serait donc forcement indépendant d'au moins une variable parmi x_1, x_2, x_3. Or, il est évident qu'aucune variable n'est redondante dans f_1. (Formellement, $f_1[x_i/1] \not\equiv f_1[x_i/0]$ pour $i = 1, 2, 3$.)

Pour f_2 la réponse est affirmative, p.ex. pour $x_2 \prec x_1 \prec x_3$:



4 Simulation et bisimulation

On considère les trois structures ci-dessous. Il y a deux prédicats p et q, les états en gris foncé satisfont p (et non q), les états en gris clair satisfont q (et non p), et les états blancs ni p ni q.



(a) Pour toute paire de structure, trouver une formule CTL qui est vrai dans l'état initial de l'une mais pas de l'autre. D'ailleurs, les seules modalités temporelles dans vos formules doivent être **AX** et/ou **EX** (et non **EF**, **AG**, etc).

Solution : $\mathbf{EX}\,\mathbf{EX}\,(\neg p \wedge \neg q)$ est vrai dans a mais ni e ni k.
$\mathbf{EX}\,\mathbf{AX}\,p$ est vrai dans e mais pas k.

(b) Trouver une formule LTL ϕ_1 qui est satisfaite par toutes les exécutions de $\mathcal{K}_1$ mais pas de $\mathcal{K}_2$, et une formule ϕ_2 pour le cas invers.

Solution : $\phi_1 = (\mathbf{X}\,\mathbf{X}\,p) \rightarrow \mathbf{G}\,\neg q$ et $\phi_2 = \mathbf{X}\,\mathbf{G}\,(p \vee q)$ conviennent.

(c) Existe-il une simulation de $\mathcal{K}_2$ vers $\mathcal{K}_3$? Et inversement ?

Solution : Dans le sens $\mathcal{K}_2 \leq \mathcal{K}_3$, la simulation suivante convient :

$$\{e, k\} \cup (\{f, g, h\} \times \{l, m\}) \cup (\{i, j\} \times \{o, p\})$$

Dans l'autre sens ($\mathcal{K}_3 \leq \mathcal{K}_2$), on peut utiliser

$$\{k, e\} \cup (\{l, m, n\} \times \{f\}) \cup (\{o, p\} \times \{i, j\})$$