Examen – Concepts et Model-Checking

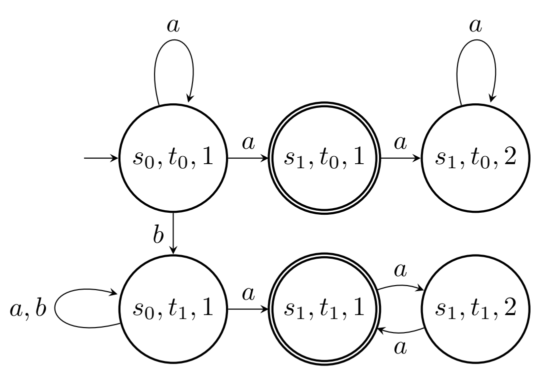
6 mars 2023

Durée: 105 minutes.

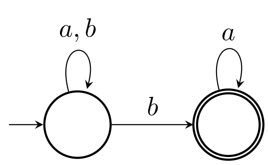
1 LTL et Automates de Büchi

(a) On considère les deux automates de Büchi ci-dessous. Construire un troisième automate de Büchi qui accepte l'intersection de leurs langages.

Solution : En appliquant la construction systématique apprise en cours, on obtient le suivant :



Un automate plus petit (construit ad-hoc) est ci-dessous. En effet, on remarque que le seconde automate exige simplement la présence d'un b quelque part dans le mot, et que le premier exige un nombre fini de b.



Dans les formules suivantes, la proposition e signifie l'envoi d'un message et r la réception d'un message.

(b) Parmi les formules de LTL ci-dessous, laquelle exprime le suivant: "Le nombre de messages envoyés est fini."

i. $\mathbf{G}\,\mathbf{F}\,\neg e$ ii. $\mathbf{G}\,\neg e$ iii. $\mathbf{F}\,e$ iv. $\mathbf{F}\,\mathbf{G}\,\neg e$

Solution : C'est bien l'option iv. Si le nombre de messages envoyés est fini, il y a soit jamais un massage, soit un dernier. Dans les deux cas, à partir d'un moment, il n'y a plus d'envois à jamais.

(c) Parmi les formules de LTL ci-dessous, laquelle exprime le suivant: "À chaque fois qu'un message est reçu, un message a été envoyé pendant l'étape précédente."

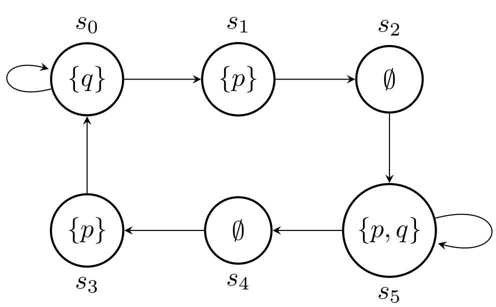
i. $\mathbf{G}\,((\mathbf{X}\,e) \rightarrow r)$ ii. $\mathbf{G}\,((\neg e) \rightarrow \mathbf{X}\,\neg r)$ iii. $\mathbf{G}\,(e \rightarrow \mathbf{X}\,r)$

Solution : C'est l'option ii qui est équivalent à $\mathbf{G}\,((\mathbf{X}\,r) \rightarrow e)$. (Strictement parlant, ceci permet la reception d'un message au tout premier coup, sans précondition. On pourrait réparer ce problème en faisaint $(\neg r) \wedge \mathbf{G}\,((\mathbf{X}\,r) \rightarrow e)$.

2 CTL

(a) Pour la structure ci-dessous, determiner les états satisfaisant ces formules:

i. $\phi_1 = \mathbf{EG}\,(\neg p \vee q)$
ii. $\phi_2 = \mathbf{AX}\,\mathbf{EG}\,(\neg p \vee q)$
iii. $\phi_3 = \mathbf{EX}\,(p\,\mathbf{EU}\,q)$



Solution :

i. $[\![\phi_1]\!] = \{s_0, s_2, s_5\}$
ii. $[\![\phi_2]\!] = \{s_1, s_2, s_3\}$
iii. $[\![\phi_3]\!] = \{s_0, s_2, s_3, s_4, s_5\}$

(b) Parmi les paires suivantes de formules, lesquelles sont équivalentes ? Donner soit une preuve d'équivalence, soit une structure satisfaisant l'une mais pas l'autre.

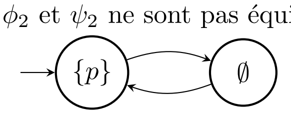
i. $\phi_1 = \neg\mathbf{EF}\,((\mathbf{EX}\,p) \rightarrow \neg q)$ et $\psi_1 = (\mathbf{AG}\,\mathbf{EX}\,p) \wedge (\mathbf{AG}\,q)$;
ii. $\phi_2 = (\mathbf{AF}\,p) \vee (\mathbf{EG}\,q)$ et $\psi_2 = \mathbf{AF}\,\mathbf{EG}\,(p \vee q)$

Solution :

i. ϕ_1 et ψ_1 sont équivalentes :

$$\begin{array}{rcl}\neg\mathbf{EF}\,((\mathbf{EX}\,p) \rightarrow \neg q) & \equiv & \mathbf{AG}\,\neg((\mathbf{EX}\,p) \rightarrow \neg q) \\ & \equiv & \mathbf{AG}\,((\mathbf{EX}\,p) \wedge q) \\ & \equiv & (\mathbf{AG}\,\mathbf{EX}\,p) \wedge (\mathbf{AG}\,q)\end{array}$$

ii. ϕ_2 et ψ_2 ne sont pas équivalentes ; la structure ci-dessous satisfait ϕ_2 mais pas ψ_2.

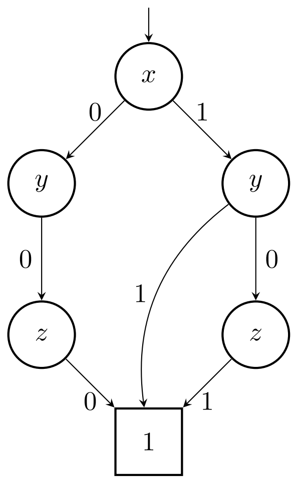


3 Diagrammes de décision binaires

On considère la formule propositionnelle $x \leftrightarrow (y \vee z)$.

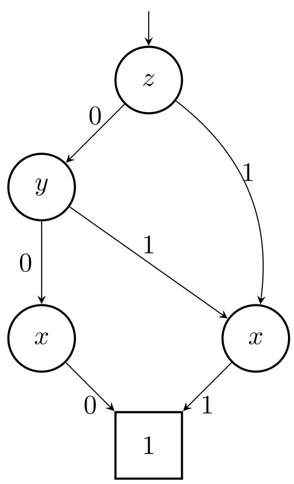
(a) Dessiner un BDD pour la formule en respectant l'ordre $x \prec y \prec z$.

Solution :



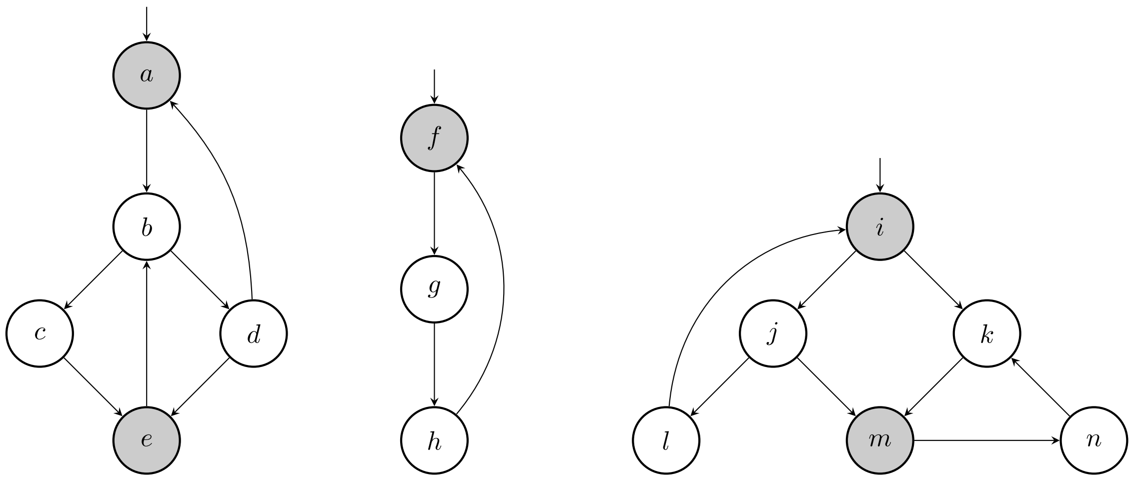
(b) Existe-il un ordre différent qui donne un BDD plus petit ? Le dessiner le cas échéant.

Solution : Oui, p.ex., l'ordre $z \prec y \prec x$ donne le BDD suivant avec un sommet de moins:



4 Simulation et bisimulation

On considère les trois structures ci-dessous. Il y a un seul prédicat p, les états satisfaisant p sont indiqués en gris.



Pour les paires suivantes, déterminer si l'un est simulé par l'autre. Selon le cas, donner une relation de simulation ou bien une formule (n'utilisant que les modalités **EX** et **AX**) qui les distingue.

i. $K_1 \leq K_2$?

   Solution : Oui, avec $H = \{\langle a, f\rangle, \langle b, g\rangle, \langle c, h\rangle, \langle d, h\rangle, \langle e, f\rangle\}$.
   Il s'agit en effet d'une bisimulation.

ii. $K_3 \leq K_2$?

   Solution : Non. $\mathbf{EX}\,\mathbf{EX}\,p$ est satisfait par K_3 mais pas K_2.

   On remarque que l'énoncé fait un peu abstraction des choses : l'existence d'une telle formule prouve qu'il n'y a pas de *bisimulation* entre les deux. Par contre, ce n'est pas preuve d'absence d'une *simulation* de K_3 vers K_2. Or, dans ce cas, une telle n'existe pas non plus : par l'absurde, elle devrait contenir $\langle i, f\rangle$ et $\langle j, g\rangle$; et K_2 n'a pas de réponse à $j \to m$.

iii. $K_2 \leq K_3$?

   Solution : Oui, simplement $\{\langle f, i\rangle, \langle g, j\rangle, \langle h, l\rangle\}$.
   Par contre, les deux ne sont pas bisimilaires comme le montre $\mathbf{EX}\,\mathbf{EX}\,p$.

iv. $K_1 \leq K_3$?

   Solution : Oui, avec $\{\langle a, i\rangle, \langle b, j\rangle, \langle c, l\rangle, \langle d, l\rangle, \langle e, i\rangle\}$.
   Par contre, les deux ne sont pas bisimilaires comme le montre $\mathbf{EX}\,\mathbf{EX}\,p$.