Examen du cours Complexité (L3)

Les documents (notes, polycopiés, ..) et calculatrices (téléphone, tablette, ..) ne sont pas autorisés.

Date : 19 janv. 2023 à 14h00 / Durée : 2 heures

Exercice 1 : Propriétés des classes de complexité

1. Donnez toutes les inclusions existant entre les 4 familles de langages suivantes : $\mathsf{TIME}(O(1))$, $\mathsf{NTIME}(O(1))$, $\mathsf{SPACE}(0)$, ainsi que la classe DEF des langages de la forme $F \cdot A^*$ où A est un alphabet fini et où $F \subseteq A^*$ est un langage fini sur A. Justifiez vos réponses.
2. Montrez que, pour tous langages L_1, L_2 dans NP, les langages $L_1 \cap L_2$ et $L_1 \cup L_2$ sont aussi dans NP.
3. Est-ce que, pour tous langages NP-complets L_1, L_2, le langage $L_1 \cap L_2$ est NP-complet ?
4. Donnez deux langages NP-complets L_1 et L_2 dont l'union $L_1 \cup L_2$ est dans P (aussi appelé PTIME).

   Déduisez-en que si $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ alors la classe des langages NP-complets n'est pas fermée par union.

Exercice 2 : Autour de $\mathsf{SubsetSum}$.

On rappelle que $\mathsf{SubsetSum}$ demande, étant donnés une liste d'entiers naturels $a_1, \ldots, a_m$ et un objectif $g \in \mathbb{N}$, si on peut obtenir g comme somme de certains des a_i, c.-à-d.

$$\mathsf{SubsetSum} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_m), g \mid \exists I \subseteq \{1, \ldots, m\} : g = \sum_{i \in I} a_i\},$$

où on suppose une représentation telle que la taille d'une instance est en $O(\lceil \log g \rceil + \sum_i \lceil \log(a_i) \rceil)$ (p.ex. les entiers sont écrits en base 2 et séparés par un symbole non numérique). On a vu en cours que ce problème est NP-complet.

Dans cet exercice, on va considérer certaines variantes de $\mathsf{SubsetSum}$:

— $\mathbb{Z}$-$\mathsf{SubsetSum}$: ici g ainsi que les a_i ne sont plus des entiers naturels mais des entiers relatifs.

— $\mathsf{2dim}$-$\mathsf{SubsetSum}$: ici g et les a_i ne sont plus des entiers naturels mais des vecteurs de $\mathbb{N}^2$.

— Half-$\mathsf{SubsetSum}$: ici on ne donne pas g, seulement la liste $a_1, \ldots, a_m$, et on demande s'il existe $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ tel que $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$ (c.-à-d. si on peut partitionner la liste en deux morceaux de même poids).

— $\mathsf{2SubsetSum}$: ici on se donne deux objectifs g_1 et g_2 et on demande s'il existe $I_1, I_2 \subseteq \{1, \ldots, m\}$ tels que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ et $\sum_{i \in I_j} a_i = g_j$ pour $j = 1, 2$ (c.-à-d. si on peut réaliser à la fois g_1 et g_2 sans utiliser un même a_i dans les deux sommes).

— Multi-$\mathsf{SubsetSum}$: ici on demande s'il existe une suite $i_1, \ldots, i_\ell$ d'indices tels que $g = \sum_{k=1}^{\ell} a_{i_k}$ (on a donc le droit de réutiliser un même a_i plusieurs fois). Notons que $\ell > m$ est possible.

On liste maintenant ces variantes par ordre (subjectif) de difficulté.

5. Montrez que $\mathbb{Z}$-$\mathsf{SubsetSum}$ est NP-complet.
6. Montrez que $\mathsf{2dim}$-$\mathsf{SubsetSum}$ est NP-complet.

7. Montrez que Half-SubsetSum est NP-complet.
8. Montrez que 2SubsetSum est NP-complet.
9. Montrez que Multi-SubsetSum est NP-complet.

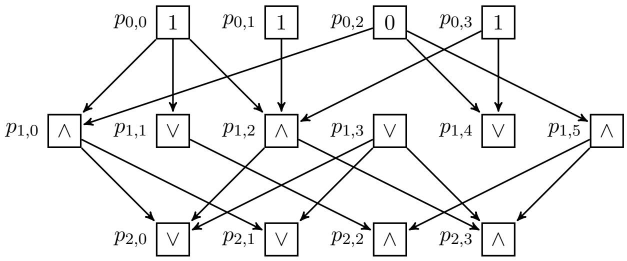
Exercice 3 : Autour de CircuitValue

On rappelle que CircuitValue est le problème de décider, étant donnés un circuit logique $\mathcal{C}$ et une de ses portes p_{goal}, si p_{goal} s'évalue à vrai (à 1) dans $\mathcal{C}$.

Dans cet exercice on s'intéresse à des circuits logiques d'une certaine forme.

Dans un circuit *stratifié*, les portes logiques sont données niveau par niveau et les entrées d'une porte au niveau ℓ sont nécessairement au niveau $\ell - 1$.

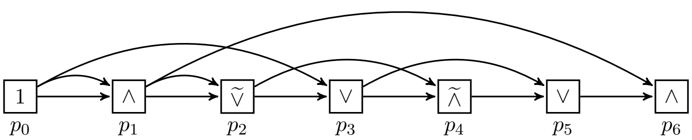
La figure ci dessous donne un exemple de circuit stratifié où chaque porte est soit une disjonction ($\vee$) soit une conjonction ($\wedge$). Les portes $p_{0,i}$ du premier niveau n'ont pas d'entrée et sont donc des disjonctions vides (représentées par 0) ou des conjonctions vides (1). On aurait ainsi pu représenter la porte $p_{1,3}$ au moyen d'une étiquette 0 à la place d'un $\vee$.



Le problème $\mathsf{Alt_2CircuitValue}[\vee, \wedge]$ est la version de CircuitValue restreinte à des circuits stratifiés *d'alternation au plus 2*, c.-à-d. constitués d'un premier niveau avec des constantes 0 ou 1, puis d'un nombre arbitraire $k \geq 0$ de niveaux ne contenant que des $\vee$, puis enfin de $k' \geq 0$ niveaux ne contenant que des $\wedge$. On n'a donc pas de porte $\vee$ sous une porte $\wedge$ (car on ne compte pas les 1 du premier niveau comme des $\wedge$).

10. Montrez que $\mathsf{Alt_2CircuitValue}[\vee, \wedge]$ est NL-complet.

Seq-CircuitValue est une version « séquentielle » de CircuitValue où les portes logiques sont alignés séquentiellement et où chaque porte (sauf la première) a exactement deux entrées dont nécessairement la porte immédiatement précédente. Voici un exemple où on utilise les opérateurs $\widetilde{\wedge}$ et $\widetilde{\vee}$ (NAND et NOR) en sus des classiques $\wedge$ et $\vee$. La porte d'entrée est une constante, 0 ou 1.



11. Montrez que $\mathsf{Seq\text{-}CircuitValue}[\wedge, \vee, \widetilde{\wedge}, \widetilde{\vee}]$ est PTIME-complet.
12. Montrez que la version $\mathsf{Seq\text{-}CircuitValue}[\widetilde{\wedge}]$ où toutes les portes sauf la première portent un $\widetilde{\wedge}$ est encore PTIME-complet.