DM, λ-calcul, 2025

à rendre le 08 avril 2025 au plus tard, à `jgl@lmf.cnrs.fr`

Notes préliminaires. Les réponses doivent être claires ; une réponse juste mais pas claire ne vaut pas mieux qu'une réponse incorrecte.

Toute affirmation doit être justifiée, par une preuve ou par une référence au cours. Aucune référence en avant n'est autorisée. N'oubliez pas de vérifier les hypothèses des résultats que vous utilisez. « Par récurrence » ne veut rien dire si vous ne dites pas sur quoi vous faites la récurrence, et au besoin le long de quel ordre bien fondé.

Ceci est un devoir à la maison. Vous avez donc le temps de vous relire : pas de faute d'orthographe, pas de rature, pas de question dans le désordre, notamment.

N'inventez pas vos propres notations, et utilisez celles de l'énoncé, ou du cours.

La correction sera effectuée question par question. Toute réponse à une question doit donc être lisible indépendamment des autres réponses aux questions. Toute référence à un lemme auxiliaire, à une construction ou à une définition que vous auriez faite dans une autre question sera ignorée.

Si vous le souhaitez, je mettrai le source LaTeX de ce sujet en ligne, et vous pourrez écrire votre solution en donnant votre nom comme argument de la commande `\author` en tête de document, puis écrire vos réponses entre les différentes `\begin{solution}` et `\end{solution}`. Envoyez-moi ensuite le pdf, pas le source.

Annotations : □□□□□ trivial, ■□□□□ très facile et court, ■■□□□ facile, moyennement long, ■■■□□ assez long ou difficile, ■■■■□ difficile ou long, ■■■■■ très difficile et long. (Notes en conséquence.)

La section 1 est indépendante des suivantes. Les sections 2 et 3 ne sont pas indépendantes.

L'examen contiendra peut-être une suite à ce DM.

1 Confluence de la $\beta\eta$-réduction

On étudie des critères de confluence pour des relations de réécriture abstraites, c'est-à-dire des relations binaires sur un ensemble A.

Une relation binaire R sur A est, formellement, juste un sous-ensemble de $A \times A$. On notera souvent $a \overset{R}{\to} b$ au lieu de $(a, b) \in R$.

Deux relations binaires R et S *commutent* si et seulement si :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "R"] \arrow[d, "S"'] & \bullet \arrow[d, dotted, "S"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "R"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

autrement dit, si pour tous a, b, c tels que $a \overset{R}{\to} b$ et $a \overset{S}{\to} c$, il existe un d tel que $b \overset{S}{\to} d$ et $c \overset{R}{\to} d$.

Pour toutes relations binaires R et S, on notera $R; S$ la relation définie par $(a, b) \in R; S$ si et seulement s'il existe a_1 tel que $a \overset{R}{\to} a_1 \overset{S}{\to} b$; et pour tout $n \geq 0$, R^n la relation $\underbrace{R; R; \cdots; R}_{n \text{ fois}}$ (si $n = 0$, c'est par convention la relation d'égalité : $(a, b) \in R^0$ si et seulement si $a = b$).

On notera R^* la clôture réflexive-transitive d'une relation binaire R. Autrement dit, $a \overset{R^*}{\to} b$ si et seulement s'il existe $n \geq 0$ (0 est autorisé) tel que $(a, b) \in R^n$.

Question 1 ▮▮▯▯▯ Montrer que, si R et S sont confluentes et si R^* et S^* commutent, alors :

(a) $R^*; S^*$ est fortement confluente ;

(b) $R \cup S$ et $R^*; S^*$ ont la même clôture réflexive-transitive ;

(c) $R \cup S$ est confluente.

On dit que R *pseudo-commute* avec S si et seulement si :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "R"] \arrow[d, "S"'] & \bullet \arrow[d, dotted, "S^*"] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "R^{\leq 1}"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

où $R^{\leq 1} = R^0 \cup R^1$. (En général, $R^{\leq n}$ est définie comme l'union de R^0, R^1, ..., R^n.) On notera bien que « R pseudo-commute avec S » n'est pas équivalent à « S pseudo-commute avec R ».

Question 2 ▮▮▮▯▯ Montrer que si R pseudo-commute avec S, alors R^* et S^* commutent.

On en déduit le *lemme de Hindley-Rosen* : si R et S sont deux relations confluentes, et si R pseudo-commute avec S, alors $R \cup S$ est confluente.

On considère les relations :

$$\begin{array}{lll} (\beta) & (\lambda x.u)v \to u[x := v] & \\ (\eta) & \quad \lambda x.ux \to u & \qquad\qquad \text{si } x \notin \mathrm{fv}(u). \end{array}$$

Par convention, elles passent au contexte, et tous les termes sont compris à α-équivalence près. On écrira $s \to_\beta t$ si s se réécrit en t par (β), $s \to_\eta t$ si s se réécrit en t par (η), $s \to_{\beta\eta} t$ si $s \to_\beta t$ ou $s \to_\eta t$. La relation $\to_{\beta\eta}$ est la *$\beta\eta$-réduction*.

On pourra utiliser sans preuve que si $u \to_{\beta\eta} u'$ alors $\mathrm{fv}(u') \subseteq \mathrm{fv}(u)$.

Question 3 ▮▮▯▯▯ Montrer que $\to_\eta$ est fortement confluente.

Question 4 ▮▮▮▮▯ Montrer que :

(a) si $u \to_\eta u'$ alors $u[x := v] \to_\eta u'[x := v]$;

(b) si $v \to_\eta v'$ alors $u[x := v] \to_\eta^* u[x := v']$;

(c) $\to_\beta$ pseudo-commute avec $\to_\eta$.

Question 5 ▯▯▯▯▯ En déduire que la $\beta\eta$-réduction est confluente.

2 Le théorème d'anti-standardisation

On revient au λ-calcul avec β-réduction.

Pour tout λ-terme u, on définit $\nu(u)$ comme la longueur de la plus longue réduction partant de u si $u \in SN$ (l'ensemble des termes fortement normalisants), comme ∞ sinon. On notera que $\nu(u) = \infty$ si et seulement s'il y a une réduction infinie partant de u. On notera aussi que $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est bien fondé, et l'on peut donc effectuer des récurrences sur $\nu(u)$. On fera aussi attention que : dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on n'a *pas* $n < n + 1\ldots$ uniquement si $n < \infty$; $u \to v$ n'entraîne *pas* $\nu(u) > \nu(v)$ (seulement $\nu(u) \geq \nu(v)$), sauf si u est fortement normalisable.

On note $|u|$ la taille d'un λ-terme u.

Question 6 ▮▮▮▯▯ Pour tous λ-termes $s, u_1, \ldots, u_m$, avec $m \geq 1$, montrer que :

$$\nu((\lambda x.s)u_1 \cdots u_m) = \begin{cases} \nu(s[x := u_1]u_2 \cdots u_m) + 1 & \text{si } x \in \mathrm{fv}(s) \\ \nu(su_2 \cdots u_m) + \nu(u_1) + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est fortement conseillé de procéder par doubles inégalités.

La *stratégie perpétuelle* sélectionne le redex le plus à gauche $(\lambda x.u)v$ tel que x soit libre dans u ou que v soit normal, le cas échéant (sinon, la réduction s'arrête). Soit $\to_{\mathrm{p}}$ la β-réduction selon la stratégie perpétuelle. Explicitement, $u \to_{\mathrm{p}} u'$ est défini par récurrence sur la taille de u comme suit.

(A) si u est en forme normale de tête $\lambda x_1, \cdots, x_n.xu_1 \cdots u_m$, si $u_1, \ldots, u_{i-1}$ sont en forme normale, et si $u_i \to_{\mathrm{p}} u'_i$ ($1 \leq i \leq m$), alors $u \to_{\mathrm{p}} \lambda x_1, \cdots, x_n.xu_1 \cdots u_{i-1}u'_iu_{i+1} \cdots u_m$;

(B) si $u = \lambda x_1, \cdots, x_n.(\lambda x \cdot s)u_1u_2 \cdots u_m$ avec $m \geq 1$,

(a) $u \to_{\mathrm{p}} \lambda x_1, \cdots, x_n.s[x := u_1]u_2 \cdots u_m$ si $x \in \mathrm{fv}(s)$ ou u_1 est normal ;

(b) $u \to_{\mathrm{p}} \lambda x_1, \cdots, x_n.(\lambda x \cdot s)u'_1u_2 \cdots u_m$ si $u_1 \to_{\mathrm{p}} u'_1$ et $x \not\in \mathrm{fv}(s)$.

Attention, $\to_{\mathrm{p}}$ n'est *pas* destinée à passer aux contextes : la description ci-dessus est la description complète de $\to_{\mathrm{p}}$.

On notera que pour tout λ-terme u, soit u est en forme normale (pour la β-réduction ordinaire), soit u a un unique $\to_{\mathrm{p}}$-redex. En particulier, la stratégie perpétuelle est déterministe. De plus, un λ-terme a un $\to_{\mathrm{p}}$-réduit en une étape si et seulement s'il n'est pas normal.

Pour tout terme u, soit $\nu_{\mathrm{p}}(u)$ la longueur de l'unique $\to_{\mathrm{p}}$-réduction partant de u (éventuellement ∞). Il est clair que $\nu_{\mathrm{p}}(u) \leq \nu(u)$, puisque toute $\to_{\mathrm{p}}$-réduction est une $\to$-réduction.

On note SN l'ensemble des λ-termes fortement normalisables.

Question 7 □□□□□ Montrer que $\nu(\lambda x_1, \cdots, x_n \cdot t) = \nu(t)$ et que $\nu_{\mathrm{p}}(\lambda x_1, \cdots, x_n \cdot t) = \nu_{\mathrm{p}}(t)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes variables $x_1, \ldots, x_n$ et tout λ-terme t.

Question 8 ▮▮▮▮▮ Soit u un λ-terme et $k \in \mathbb{N}$ (donc $k \neq \infty$), avec $(k, |u|)$ minimal dans l'ordre lexicographique tel que $\nu_{\mathrm{p}}(u) < k \leq \nu(u)$. Montrer que :

— (A) si u est sous forme normale de tête $\lambda x_1, \cdots, x_n.xu_1.u_m$, c'est impossible.

— (B) si u a pour forme de tête $\lambda x_1, \cdots, x_n.(\lambda x.s)u_1 \cdots u_m$ avec $m \geq 1$:

 — (a) si $x \in \mathrm{fv}(s)$, ou u_1 est normal, c'est impossible ;

 — (b) si $x \not\in \mathrm{fv}(s)$ et u_1 n'est pas normal, alors $u_1 \to_{\mathrm{p}} u'_1$ pour un certain λ-terme u'_1, et en posant $j \stackrel{\text{def}}{=} \nu(su_2 \cdots u_m)$, montrer que $j + \nu(u'_1) < k - 2$, donc que $j < \infty$, puis que $\nu(u_1) \geq k - 1 - j$, mais que la double inégalité $\nu_{\mathrm{p}}(u_1) < k - 1 - j \leq \nu(u_1)$ est impossible ; en déduire une contradiction dans ce cas aussi.

Donc, pour tout λ-terme u, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il est impossible que $\nu_{\mathrm{p}}(u) < k \leq \nu(u)$.

Question 9 ▮□□□□ En déduire que $\nu_{\mathrm{p}}(u) = \nu(u)$ pour tout λ-terme u.

Question 10 □□□□□ Montrer le *théorème d'anti-standardisation* : si u n'est pas fortement normalisable, alors la $\to_{\mathrm{p}}$-réduction à partir de u est infinie.

3 Une fonction qui dépasse toutes les fonctions calculables

Pour tout $u \in SN$, on définit $h(u)$ comme suit :

$$h(\lambda x_1, \cdots, x_n.xu_1 \cdots u_m) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} h(u_i) \tag{1}$$

$$h(\lambda x_1, \cdots, x_n.(\lambda x.s)u_1 \cdots u_m) \stackrel{\text{def}}{=} h(s[x := u_1]u_2 \cdots u_m) + 1 \tag{2}$$

si $m \geq 1$,
et $x \in \text{fv}(s)$ ou u_1 est normal

$$h(\lambda x_1, \cdots, x_n.(\lambda x.s)u_1 \cdots u_m) \stackrel{\text{def}}{=} h(su_2 \cdots u_m) + h(u_1) + 1 \tag{3}$$

si $m \geq 1$,
$x \notin \text{fv}(s)$, et u_1 n'est pas normal.

Ceci ressemble à une définition de $h(u)$ par récurrence sur la taille de la forme de tête de u, mais n'en est pas une : dans (2), le terme sur lequel h s'applique à droite n'est pas nécessairement plus petit que le terme de gauche.

Question 11 ▮▮▮▯▯ Montrer que $h(u)$ est bien défini pour tout $u \in SN$. Un point important de la question est : sur quoi faire porter la récurrence ?

Question 12 ▮▮▮▯▯ Montrer que $h(u) = \nu_{\text{p}}(u)$ pour tout $u \in SN$. La **Question 11** a montré qu'il existe une unique fonction $h \colon SN \to \mathbb{N}$ satisfaisant aux équations (1), (2) et (3). Il suffit donc de vérifier que ν_{p} est bien définie sur tout SN et que ν_{p} satisfait aux mêmes équations que h.

On cherche à estimer la vitesse de croissance de la fonction h en fonction de son argument.

On représente les λ-termes sous forme de chaînes de caractères de façon évidente. On admettra que le problème suivant, noté **SN**, est indécidable :
Entrée : un λ-terme u ;
Question : $u \in SN$?

On note p la fonction qui prend en entrée un λ-terme u et retourne en sortie l'unique réduit en une étape de u par $\to_{\text{p}}$ si u n'est pas normal, et un symbole spécial ✓, différent de tous les λ-termes, si u est normal. On admettra que p est calculable, autrement dit, qu'il existe une machine de Turing qui termine toujours et retourne $\text{p}(u)$ sur tout λ-terme u en entrée.

À partir de p, on définit une fonction F qui à tout couple (u, k) d'un λ-terme u et d'un entier $k \in \mathbb{N}$ associe la forme normale $u\downarrow$ de u si l'on a $u \to_{\text{p}}^{*} u\downarrow$ en k étapes ou moins, et sinon l'unique réduit de u par $\to_{\text{p}}$ en exactement k étapes ;

autrement dit, $F(u, 0) \stackrel{\text{def}}{=} u$, $F(u, n+1)$ vaut u si $\mathrm{p}(u) = \checkmark$, $F(\mathrm{p}(u), n)$ sinon. Il est clair que F est calculable.

Question 13 ▮▯▯▯▯ Supposons une fonction (totale) calculable ℓ prenant un λ-terme u en entrée et retournant un entier $\ell(u)$, telle que $h(u) \leq \ell(u)$ pour tout $u \in SN$. La fonction c qui à tout λ-terme u associe 0 si $\mathrm{p}(F(u, \ell(u)) = \checkmark$, 1 sinon, est calculable. Montrer que, sous ces hypothèses, **SN** serait décidable, et en conclure que la fonction h n'est en fait majorée (sur SN) par aucune fonction calculable définie sur tous les λ-termes.

Une remarque pour finir. On peut utiliser la construction de la **Question 11** pour montrer que h est une fonction qui est non seulement bien définie sur SN, mais même calculable sur SN, au sens suivant : il existe une machine de Turing $\mathcal{M}$ qui, si on lui donne un λ-terme $u \in SN$ en entrée, termine en produisant en sortie la valeur de $h(u)$. Si on lui donne un λ-terme u non fortement normalisant en entrée, rien n'est demandé de $\mathcal{M}$, et elle peut parfaitement ne pas terminer sur u. La **Question 13** montre en particulier qu'on ne peut pas étendre h à une fonction qui serait calculable sur tous les λ-termes, et qu'il n'y a même pas de fonction calculable ℓ sur les λ-termes qui pourrait fournir une approximation supérieure $\ell(u)$ de $h(u)$ pour chaque $u \in SN$.

Tout ceci repose sur le fait que **SN** est indécidable, que nous avons admis. Une des démonstrations les plus simples de ce fait se trouve dans : Paweł Urzyczyn, *A simple proof of the undecidability of strong normalization*, Mathematical Structures in Computer Science 13(2003), pages 5–13.