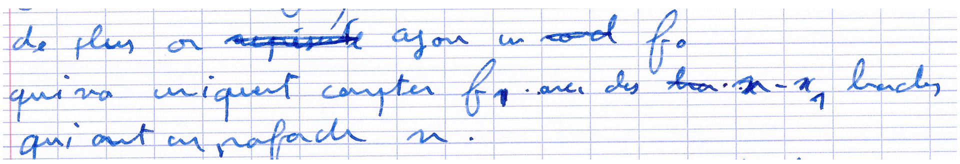
DM, λ-calcul, 2019

à rendre le 09 avril 2019 au plus tard

Note. L'examen contiendra peut-être une suite à ce DM. Consacrez-y donc du temps.

Important. Soyez clair. Je considérerai toute réponse trop floue, alambiquée, ou simplement mal écrite, comme fausse. Vous n'avez pas d'excuse : vous avez le temps de faire ce DM. Voici un exemple à éviter :



C'est illisible. Les ratures et les fautes d'orthographe n'arrangent rien. Et la réponse est complètement hors sujet, mais c'est plus difficile à voir.

Voici un exemple que l'on peut considérer comme un modèle :

Q 5

> Si F une fonction inflationnaire d'un treillis complet L dans lui-même, et si $\eta \leq \eta'$, alors
> $$lfp_\eta(F) \leq lfp_{\eta'}(F)$$

En effet :

Il suffit de constater que l'ensemble $FP_{\eta'}$ des points fixes supérieurs à η' est, par transitivité, inclus dans l'ensemble FP_η des points fixes supérieurs à η.

Comme $lfp_\eta(F)$ minore $FP_\eta \supset FP_{\eta'}$, $lfp_\eta(F)$ est un minorant de $FP_{\eta'}$, et

$$lfp_\eta(F) \leq lfp_{\eta'}(F)$$

puisque $lfp_{\eta'}(F)$ est le plus grand des minorants de $FP_{\eta'}$.

C'est clair, facile à lire. L'argument est correct, écrit de façon concise, sans analyse de cas ou argument par contradiction superflu.

⋆ ⋆ ⋆

1 Le λ-calcul algébrique

On considère un λ-calcul simplement typé, étendu à l'aide de constructions de termes comme celles utilisées dans notre étude du lpo.

Pour ceci, on considère pour commencer une algèbre de types simples étendus (les *types*, en bref). Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de couples c/n, où c est un symbole appelé *constructeur de types* et $n \in \mathbb{N}$ est son arité. On supposera qu'il existe au moins un constructeur de type d'arité 0. Les *types* sont définis inductivement par :

— pour tous types σ, τ, $\sigma \to \tau$ est un type ;

— pour tout $c/n \in \mathcal{S}$, pour tous types $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, $c(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ est un type.

Exemple 1. *Lorsque* $\mathcal{S} = \{\mathtt{int}/0, \mathtt{bool}/0, \mathtt{list}/1\}$*, les objets suivants sont des types :*

— $\mathtt{int}()$ *(abrégé* $\mathtt{int}$*),*

— $\mathtt{list}(\sigma) \to \mathtt{int}$ *pour chaque type* σ*,*

— *et pour tous types* σ *et* τ*,* $(\sigma \to \tau) \to (\mathtt{list}(\sigma) \to \mathtt{list}(\tau))$.

Les termes du λ-calcul algébrique sont une extension du λ-calcul, où l'on a ajouté des constantes f et des règles de réduction. Formellement, soit Σ une *signature*, c'est-à-dire un ensemble de *déclarations* $f : \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \Rightarrow \tau$, où $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau$ sont des types et f est un symbole, où chaque symbole n'est déclaré qu'une fois dans Σ.

Exemple 2. *Poursuivant l'exemple 1,* Σ *peut contenir :*

— $0 :\Rightarrow \mathtt{int}$,

— $\mathtt{s} : \mathtt{int} \Rightarrow \mathtt{int}$,

— $\mathtt{nil}_\sigma :\Rightarrow \mathtt{list}(\sigma)$,

— $\mathtt{cons}_\sigma : \sigma \times \mathtt{list}(\sigma) \Rightarrow \mathtt{list}(\sigma)$,

— $\mathtt{len}_\sigma : \mathtt{list}(\sigma) \Rightarrow \mathtt{int}$,

— $\mathtt{map}_{\sigma,\tau} : (\sigma \to \tau) \times \mathtt{list}(\sigma) \Rightarrow \mathtt{list}(\tau)$*, pour tous types* σ *et* τ*.*

Les termes du λ-calcul algébrique sont définis par :

$$\begin{aligned}
s, t, u, v, \ldots ::= {} & x_\sigma, y_\tau, z_\xi, \ldots && \text{variables} \\
& \mid uv && \text{applications} \\
& \mid \lambda x_\sigma . u && \text{abstractions} \\
& \mid f(s_1, \cdots, s_n) && \text{où } f \in \Sigma \text{, d'arité } n
\end{aligned}$$

On notera que les variables sont toutes décorées d'un type : on utilise ici une variante dite de Church du λ-calcul, où les types des variables sont explicitement indiqués. On a $x_\sigma = y_\tau$ si et seulement si $x = y$ et $\sigma = \tau$.

Grâce à cela, les règles de typage n'ont pas besoin de contexte de typage. À part cela, on a juste besoin d'une nouvelle règle (f) :

$$\frac{}{\vdash x_\sigma : \sigma}\,(Var) \qquad \frac{\vdash u_1 : \sigma_1 \cdots \vdash u_n : \sigma_n}{\vdash f(u_1, \cdots, u_n) : \tau}\,(f)$$
$$\text{si } f : \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \Rightarrow \tau \text{ est dans } \Sigma$$

$$\frac{\vdash u : \sigma \to \tau \quad \vdash v : \sigma}{\vdash uv : \tau}\,(App) \qquad \frac{\vdash u : \tau}{\vdash \lambda x_\sigma . u : \sigma \to \tau}\,(Abs)$$

1. Montrer que, pour tout terme u, il existe au plus une dérivation de typage de la forme $\vdash u : \tau$. Si cette dérivation existe, on dira que u est *typable*. Cette dérivation détermine notamment un unique type τ, qu'on appellera *le type de* u.

Les règles de calcul sont paramétrées par un ensemble $\mathcal{R}$ dits de *règles* $\ell \to r$, où ℓ et r sont des termes du λ-calcul algébrique tels que :

(i) ℓ ne contient aucune abstraction,

(ii) ℓ ne contient aucune application,

(iii) ℓ et r sont typables et de même type,

(iv) et toutes les variables libres de r sont libres dans ℓ.

On définit la réduction $\to_\mathcal{R}$ comme étant la plus petite réduction stable par contextes (comme pour le λ-calcul) telle que :

— $(\lambda x.u)v \to_\mathcal{R} u[x := v]$ (β-réduction),

— et $\ell\theta \to_\mathcal{R} r\theta$ pour toute règle $\ell \to r$ de $\mathcal{R}$, où θ est une substitution (parallèle) quelconque $[x_{1\sigma_1} := t_1, \cdots, x_{n\sigma_n} := t_n]$, où pour tout i, t_i est typable et de type σ_i.

Exemple 3. *$\mathcal{R}$ peut contenir les règles :*

— $\mathtt{len}_\sigma(\mathtt{nil}_\sigma) \to 0$,

— $\mathtt{len}_\sigma(\mathtt{cons}_\sigma(x_\sigma, y_{\mathtt{list}(\sigma)})) \to \mathtt{s}(\mathtt{len}_\sigma(y_{\mathtt{list}(\sigma)}))$,

— $\mathtt{map}_{\sigma,\tau}(z_{\sigma\to\tau}, \mathtt{nil}_\sigma) \to \mathtt{nil}_\tau$,

— $\mathtt{map}_{\sigma,\tau}(z_{\sigma\to\tau}, \mathtt{cons}_\sigma(x_\sigma, y_{\mathtt{list}(\sigma)})) \to \mathtt{cons}_\tau(z_{\sigma\to\tau}x_\sigma, \mathtt{map}_{\sigma,\tau}(z_{\sigma\to\tau}, y_{\mathtt{list}(\sigma)}))$.

On aura alors notamment $\mathtt{len}_{\mathtt{int}}(\mathtt{cons}_{\mathtt{int}}(0, \mathtt{cons}_{\mathtt{int}}(1, \mathtt{nil}_{\mathtt{int}}))) \to_{\mathcal{R}} \mathtt{s}(\mathtt{len}_{\mathtt{int}}(\mathtt{cons}_{\mathtt{int}}(1, \mathtt{nil}_{\mathtt{int}})))$, *en choisissant la deuxième règle,* $\sigma = \mathtt{int}$*, et* $\theta = [x_{\mathtt{int}} := 0, y_{\mathtt{list}(\mathtt{int})} := \mathtt{cons}_{\mathtt{int}}(1, \mathtt{nil}_{\mathtt{int}})]$.

---

2. Montrer la propriété d'auto-réduction : si u est typable de type τ et $u \to_{\mathcal{R}} v$ alors $v : \tau$ est typable et de type τ. On se concentrera sur les cas nouveaux par rapport au λ-calcul (pas la peine de considérer la β-réduction, en clair). On donnera aussi *explicitement*, et *à part*, la liste des hypothèses dont on a besoin, parmi (i)–(iv).
3. On suppose dans cette question que $\mathcal{S}$ contient $o/0$, Σ contient $\mathtt{r} : o \Rightarrow (o \to o)$ et $\mathtt{i} : (o \to o) \Rightarrow o$, et $\mathcal{R}$ contient la règle $\mathtt{r}(\mathtt{i}(x_{o\to o})) \to x_{o\to o}$.
   (a) Donner une traduction $u \mapsto u^*$ du λ-calcul pur (non typé) vers le λ-calcul algébrique. Votre traduction devra satisfaire les propriétés suivantes : (A) u^* est de type o pour tout λ-terme u ; (B) si $u \to v$ alors $u^* \to^+ v^*$. Justifier, en introduisant clairement tout lemme auxiliaire qui serait nécessaire, et en les mettant dans le bon ordre (on ne peut utiliser que des lemmes précédemment démontrés ; réécrivez si nécessaire).
   (b) En déduire que le λ-calcul algébrique typé ne termine pas, même faiblement, en général. On donnera un contre-exemple *explicite* u, avec une étude de toutes les réductions partant de u.

2 Réductions de tête

On s'intéresse à la notion de réduction de tête $\to_t$ dans le λ-calcul pur, c'est-à-dire non typé. On rappelle les règles de typage du système $\mathcal{D}\Omega$ (appelé $\mathcal{D}_\omega$ dans les feuilles de TD) :

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\ (Ax) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash u : \Omega}\ (\Omega)$$

$$\frac{\Gamma, x : F \vdash u : G}{\Gamma \vdash \lambda x.u : F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow I) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash v : F}{\Gamma \vdash uv : G}\ (\Rightarrow E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F \quad \Gamma \vdash u : G}{\Gamma \vdash u : F \cap G}\ (\cap I) \quad \frac{\Gamma \vdash u : F \cap G}{\Gamma \vdash u : F}\ (\cap E_1) \quad \frac{\Gamma \vdash u : F \cap G}{\Gamma \vdash u : G}\ (\cap E_2)$$

Les types sont donnés par la grammaire :

$$\begin{aligned} F, G, \ldots ::= {} & b && \text{type de base} \\ & \mid \Omega && \text{type universel} \\ & \mid F \cap G && \text{type intersection} \\ & \mid F \Rightarrow G && \text{type flèche.} \end{aligned}$$

Soit HN l'ensemble des λ-termes (purs) qui ont une forme normale de tête, c'est-à-dire dont la réduction de tête termine, et Λ l'ensemble de tous les λ-termes (purs). On appellera *t-contracté* u' d'un λ-terme u est un λ-terme tel que $u \to_t u'$. Pour tout λ-terme $u \in HN$, on notera $\nu_t(u)$ la longueur de la plus grande réduction de tête partant de u.

4. Pour tout λ-terme u, et pour toute variable x, montrer que si $ux \in HN$ alors $u \in HN$.

Notons $u \to^*_{t,\neq\lambda} \lambda x.u_0$ si et seulement si la réduction de tête partant de u aboutit à une λ-abstraction, et $\lambda x.u_0$ est la première λ-abstraction le long de cette réduction ; autrement dit, si $u = t_0 \to_t t_1 \to_t \cdots \to_t t_{n-1} \to_t t_n$ où $n \in \mathbb{N}$, t_0, t_1, $\ldots$, t_{n-1} ne sont pas des λ-abstractions, et $t_n = \lambda x.u_0$. (Comme cas particulier, on a $\lambda x.u_0 \to^*_{t,\neq\lambda} \lambda x.u_0$, avec $n = 0$.)

Pour tous ensembles S et S' de λ-termes purs, on note $S \Rightarrow S'$ l'ensemble des λ-termes purs u dans HN tels que pour toute réduction de tête de la forme $u \to^*_{t,\neq\lambda} \lambda x.u_0$, on a $u_0[x := v] \in S'$ pour tout $v \in S$. On notera que ce n'est *pas* la définition utilisée en cours.

On pose :

$$\begin{aligned} HRED_b &= HN && (b \text{ type de base}) \\ HRED_{F \Rightarrow G} &= HRED_F \Rightarrow HRED_G \\ HRED_\Omega &= \Lambda \\ HRED_{F \cap G} &= HRED_F \cap HRED_G. \end{aligned}$$

On dira qu'un ensemble S de λ-termes purs est un *t-candidat* si et seulement s'il vérifie les propriétés :

HR1 $S \subseteq HN$;

HR3 tout terme u neutre dont tous les t-contractés u' sont dans S est lui-même dans S,

où un terme *neutre* est un terme qui n'est pas une λ-abstraction. Il n'y a pas de condition HR2, et la numérotation n'est faite que pour vous rappeler une définition proche du cours.

5. Pour tout ensemble de λ-termes S, pour tout t-candidat S', montrer que $S \Rightarrow S'$ est un t-candidat.

On identifie certains types, dits *triviaux*, par la grammaire :

$$\begin{aligned}\Theta ::= &\ \Omega \\ &\mid \Theta_1 \cap \Theta_2 \\ &\mid F \Rightarrow \Theta,\end{aligned}$$

où F est un type quelconque. Les autres types sont dits *non triviaux*.

6. Montrer que pour tout type non trivial F, $HRED_F$ est un t-candidat.
7. Pour tout ensemble S de λ-termes, pour tout t-candidat S', pour tout $u \in S \Rightarrow S'$ et pour tout $v \in S$, montrer que uv est dans S'.
8. Pour tout ensemble S de λ-termes tel que S contient toutes les variables, pour tout t-candidat S', montrer que pour tout λ-terme pur t, si $t[x := v] \in S'$ pour tout $v \in S$, alors $\lambda x.t$ est dans $S \Rightarrow S'$.
9. Montrer que pour tout jugement de typage $\Gamma \vdash u : F$ en $\mathcal{D}\Omega$, où $\Gamma = x_1 : F_1, \cdots, x_n : F_n$ et F est un type non trivial, pour toute substitution $\theta = [x_1 := v_1, \cdots, x_n := v_n]$ avec $v_i \in HRED_{F_i}$ pour tout i, on a $u\theta \in HRED_F$.
10. En déduire que tout λ-terme typable dans le système $\mathcal{D}\Omega$ a une forme normale de tête.
11. En s'inspirant de résultats similaires vus en TD, montrer la réciproque : tout terme qui a une forme normale de tête est typable dans le système $\mathcal{D}\Omega$ d'un type non trivial, autrement dit, pour tout terme $u \in HN$ il existe une dérivation d'un jugement de la forme $\Gamma \vdash u : F$ avec F non trivial. Pour plus de lisibilité, on notera $\Omega^k \to F$ le type $\underbrace{\Omega \to \cdots \to \Omega \to}_{k \text{ fois}} F$. On notera aussi $\Gamma \cap \Delta$ le contexte obtenu en fusionnant les types des variables entre Γ et Δ, comme en TD.