Langages Formels

Licence Informatique – ENS Cachan

Examen du 26 mai 2016

durée 3 heures

Document autorisé : polycopié du cours.
Toutes les réponses devront être correctement justifiées.
Le chiffre en regard d'une question est une indication sur sa difficulté ou sa longueur.

1 Langages

On fixe un alphabet Σ. On note $\mathsf{Pref}(w)$ l'ensemble des préfixes d'un mot $w \in \Sigma^*$. Etant donné un langage $L \subseteq \Sigma^*$, on définit $\Phi(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathsf{Pref}(w) \subseteq L\}$. On souhaite étudier la nature du langage $\Phi(L)$ en fonction de la nature de L.

[1] **a)** On suppose que $\Sigma = \{a\}$ ne contient qu'une lettre. Caractériser l'ensemble des langages $\Phi(L)$ que l'on peut obtenir.

[3] **b)** Montrer que
- si L est reconnaissable, alors $\Phi(L)$ est reconnaissable.
- si L est apériodique, alors $\Phi(L)$ est apériodique.

[2] **c)** Montrer que le langage $K = \{a^n b a^n b a^n b \mid n > 0\}$ n'est pas algébrique.

[3] **d)** Montrer que si L est algébrique, alors $\Phi(L)$ n'est pas nécessairement algébrique.
Indication : Construire un langage algébrique L tel que $\Phi(L) \cap a^+ba^+ba^+b = K$.

2 Logique

On fixe un alphabet Σ. Etant donné un langage $L \subseteq \Sigma^*$, on définit l'ensemble $\Psi(L)$ des mots $w \in \Sigma^*$ tels que pour toute factorisation $w = v_1 w'$ il existe une factorisation $w' = v_2 v_3$ telle que $v_3 v_2 v_1 \in L$.

[4] **a)** Soit $\alpha \in \mathrm{MSO}(\Sigma, <)$ une formule close. Construire une formule close $\beta \in \mathrm{MSO}(\Sigma, <)$ telle que $\mathcal{L}(\beta) = \Psi(\mathcal{L}(\alpha))$. En déduire que si L est reconnaissable (resp. apériodique) alors $\Psi(L)$ est reconnaissable (resp. apériodique).

3 Fonctions séquentielles

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux automates séquentiels définissant les fonctions $f = [\![\mathcal{A}]\!] \colon A^* \to B^*$ et $g = [\![\mathcal{B}]\!] \colon A^* \to B^*$.

[2] **a)** Soit $X = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$. Montrer que l'on peut décider si f et g coincident sur X, i.e., $f(u) = g(u)$ pour tout $u \in X$.

[2] **b)** On suppose que $X = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = \emptyset$. On note h la fonction "union" définie sur $\mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(g)$ par $h(u) = f(u)$ si $u \in \mathrm{dom}(f)$ et $h(u) = g(u)$ si $u \in \mathrm{dom}(g)$. Montrer que h n'est pas nécessairement séquentielle.

[1] **c)** Montrer que l'on peut décider si la fonction f définie par $\mathcal{A}$ est surjective.

[4] **d)** Soit $Y \subseteq B^*$ l'ensemble des mots $v \in B^*$ qui ont au moins deux antécédents par f : il existe $u_1, u_2 \in A^*$ tels que $u_1 \neq u_2$ et $f(u_1) = v = f(u_2)$. En utilisant les propriétés des fonctions séquentielles et des langages reconnaissables (et donc sans construire un automate), montrer que le langage Y est reconnaissable. En déduire que l'on peut décider si la fonction f définie par $\mathcal{A}$ est injective.