Théorie des Langages

Magistère STIC

Examen du 31 mai 2007

durée 3 heures

Document autorisé : polycopié du cours.
Les exercices sont indépendants.
Toutes les réponses devront être correctement justifiées.

1 Indices et exposants

On s'intéresse dans cette partie aux expressions LaTeX utilisant des indices et des exposants comme par exemple :

`x_i`	x_i	`x_{i+1}`	x_{i+1}	`x^n`	x^n	`x^{n+1}`	x^{n+1}
`x_i^2`	x_i^2	`x^2_i`	x_i^2	`x^{n^2}`	x^{n^2}	`x^{n_i}`	x^{n_i}
`x_{i_j}`	x_{i_j}	`x_{i^2}`	x_{i^2}	`{x^2}^2`	${x^2}^2$	`x^{2^2}`	x^{2^2}
`x_{i_i}`	x_{i_i}	`{x_i}_i`	${x_i}_i$	`x_i_j`	erreur	`x_i^2_j`	erreur

On considère la grammaire G_1 définie par $S \to a \mid \{S\} \mid S \,\hat{}\, S \mid S \,\_\, S$.

a) Montrer que la grammaire G_1 est ambiguë et montrer qu'elle engendre des expressions non autorisées en LaTeX.

On considère la grammaire G_2 définie par

$$\begin{aligned} &S \to T \mid T \,\hat{}\, T \mid T \,\_\, T \mid T \,\hat{}\, T \,\_\, T \mid T \,\_\, T \,\hat{}\, T \\ &T \to a \mid \{S\} \end{aligned}$$

On note G_2' la grammaire G_2 augmentée par la règle $S' \to S$.

b) Montrer que G_2 engendre `a^{a_a}_a` et dessiner un arbre de dérivation pour ce mot. Montrer que G_2 n'engendre pas le mot `a^a_a_a`.

c) Montrer que la grammaire G_2 n'est pas LL.

d) Calculer Follow_1 pour les variables S', S et T.

e) Calculer l'automate $\mathcal{C}_0$ des contextes pour les 0-items.
On se restreindra bien sûr aux états accessibles. On pourra représenter un état de façon concise sous la forme $\mathrm{clot}(W)$ en donnant seulement les éléments de W et pas tous les éléments de la clôture.

f) Donner la table d'analyse SLR de la grammaire G_2'. Y a-t-il des conflits ? La grammaire est-elle ambiguë ?

g) Montrer que tout mot engendré par G_2 est bien "parenthésé". Formellement, on note A l'alphabet réduit aux deux accolades { et }. Montrer que la projection de $\mathcal{L}_{G_2}(S)$ sur A est contenue dans le langage de Dyck D_1^* sur l'alphabet A. Montrer que l'inclusion est stricte.

h) (Facultatif) Montrer que G_2 n'engendre aucun mot de la forme $u \,\hat{}\, v \,\hat{}\, w$ avec $v \in D_1^*$.

2 Automates à un pic

Un *automate à un pic* est un automate à pile tel que dans tout calcul valide, la taille de la pile n'augmente plus une fois qu'elle a diminué. La taille de la pile peut donc augmenter (au sens large) pendant une première partie du calcul, puis elle ne fait que diminuer (au sens large).

Un *langage à un pic* est un langage qui peut être accepté *par pile vide* par un automate à un pic.

a) Montrer que le langage $L = \{a^n b^n \mid n > 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$ est un langage linéaire.

b) Montrer que L est un langage à un pic.

c) Montrer que tout langage linéaire est un langage à un pic.

d) Montrer que le langage $K = \{a^{i_1} b a^{i_2} b \cdots a^{i_n} b \mid n > 0 \text{ et } \exists j, i_j \neq j\}$ est un langage à un pic.

e) (Facultatif) Trouver une grammaire linéaire qui engendre K.

f) Soit $G = (\Sigma, V, P)$ une grammaire vérifiant :

1. $V = V_1 \uplus V_2$ avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
2. $P_1 = P \cap (V_1 \times (\Sigma \cup V)^*)$ satisfait $P_1 \subseteq V_1 \times (V_1\Sigma^* \cup \Sigma^*)$, i.e., les règles issues des variables de V_1 sont linéaires gauches et ne font pas intervenir les variables de V_2.
3. $P_2 = P \cap (V_2 \times (\Sigma \cup V)^*)$ satisfait $P_2 \subseteq V_2 \times (\Sigma^* V_2 V_1 \cup \Sigma^*(V_1 \cup V_2)\Sigma^* \cup \Sigma^*)$.

Montrer que pour tout $x \in V$, $\mathcal{L}_G(x)$ est un langage linéaire.

g) Même question en remplaçant la condition 3 ci-dessus par

$$P_2 \subseteq V_2 \times (\Sigma^* V_2 V_1^* \cup \Sigma^*(V_1 \cup V_2)\Sigma^* \cup \Sigma^*).$$

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, T, (q_0, z_0))$ un automate à pile arbitraire.

Pour $p,q \in Q$ et $z \in Z$ on définit $K_{p,z,q} \subseteq \Sigma^*$ comme l'ensemble des mots $w \in \Sigma^*$ tels qu'il existe un calcul $p,z \xrightarrow{w} q,\varepsilon$ dans $\mathcal{A}$ dans lequel la taille de la pile ne dépasse pas 1.

h) Montrer que $K_{p,z,q}$ est un langage rationnel.

Pour $p,q \in Q$ et $z \in Z$ on définit $L_{p,z,q} \subseteq \Sigma^*$ comme l'ensemble des mots $w \in \Sigma^*$ tels qu'il existe un calcul $p,z \xrightarrow{w} q,\varepsilon$ dans $\mathcal{A}$ qui soit *à un pic*, i.e., durant ce calcul la pile n'augmente plus une fois qu'elle a diminué.

i) Construire une grammaire vérifiant les conditions de la question **(g)** et dans laquelle les variables de V_2 engendrent les langages du type $L_{p,z,q}$ et les variables de V_1 engendrent les langages du type $K_{p,z,q}$.

j) Montrer que tout langage à un pic est un langage linéaire.