Chapitre 10

Théories décidables

10.1 Généralités

Nous nous limitons ici aux méthodes d'élimination des quantificateurs, basées sur les deux lemmes qui suivent. Comme précedemment, on suppose donné un système d'inférence complet et récursif pour la logique du premier ordre.

Lemme 10.1.1 *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'axiomes récursif. Si,*

1. *pour toute formule $\exists x.\phi$ où ϕ est sans quantificateur, on peut construire une formule ψ sans quantificateur telle que $\mathcal{A} \models \forall \vec{y}.(\exists x \phi \leftrightarrow \psi)$*
2. *Pour toute formule sans variable Ω, on peut décider si $\Omega \in \mathsf{Th}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathcal{A} \models \Omega$ ou $\mathcal{A} \models \neg\Omega$)*

alors $\mathsf{Th}(\mathcal{A})$ est récursive (resp. complète).

Preuve:
Si ϕ est une formule sans variable libre, sans perte de généralité, on peut supposer ϕ en forme prénexe : $\phi = Q_1 x_1, \ldots, Q_n x_n.\phi_0$ où ϕ_0 est sans quantificateur. On montre, par récurrence sur n que, sous les hypothèses de l'énoncé, on peut construire une formule ψ sans variable telle que $\mathcal{A} \models \phi \leftrightarrow \psi$.

Si $n = 0$, il suffit de choisir $\psi = \phi_0$.

Si $Q_n = \exists$, par hypothèse, on peut construire une formule ϕ_1 telle que $\mathcal{A} \vdash (\exists x_n.\phi_0) \leftrightarrow \phi_1$. Par hypothèse de récurrence, on peut construire ψ telle que $\mathcal{A} \models \psi \leftrightarrow Q_1 x_1, \ldots, Q_{n-1} x_{n-1}.\phi_1$ et ψ ne contient pas de variable. On a alors $\mathcal{A} \vdash \phi \leftrightarrow \psi$

Si $Q_n = \forall$, par hypothèse, on peut construire une formule ϕ_1 telle que $\mathcal{A} \vdash (\exists x_n.\neg\phi_0) \leftrightarrow \phi_1$, et donc $\mathcal{A} \vdash (\forall x_n, \phi_0) \leftrightarrow \neg\phi_1$. Par hypothèse de récurrence, on peut construire une formule ψ ne contenant pas de variable telle que $\mathcal{A} \models (Q_1 x_1 \ldots, Q_{n-1} x_{n-1} \neg\phi_1) \leftrightarrow \psi$. On a alors $\mathcal{A} \vdash \phi \leftrightarrow \psi$.

Pour décider si $\phi \in \mathsf{Th}(\mathcal{A})$ il suffit donc de construire la formule ψ sans variable équivalente et de décider si $\mathcal{A} \models \psi$.

Remarquons enfin que, si $\mathcal{A} \models \phi \leftrightarrow \psi$, alors $\mathcal{A} \models \neg\phi \leftrightarrow \neg\psi$. Donc, si pour toute formule sans variable ψ, $\mathcal{A} \models \psi$ ou $\mathcal{A} \models \neg\psi$, alors pour toute formule ϕ sans variable libre, $\mathcal{A} \models \phi$ ou $\mathcal{A} \models \neg\phi$.

Il n'est pas toujours possible d'éliminer directement un quantificateur. Dans ce cas, il peut être utile d'enrichir de manière conservative la théorie, en introduisant des symboles de prédicats correspondant aux formules dont on ne peut pas éliminer les quantificateurs :

Lemme 10.1.2 *Si $P \notin \mathcal{P}$ est un symbole de prédicat $n-$aire et ϕ une formule du premier ordre sur $\mathcal{P}, \mathcal{F}$ à n variables libres*

$$\mathsf{Th}(\mathcal{A}) = \mathsf{Th}(\mathcal{A} \cup \{\forall x_1, \ldots, x_n.(P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n))\}) \cap \mathcal{F}_0(\mathcal{P})(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

Nous verrons un exemple plus loin d'utilisation de ces extensions.

10.2 La théorie des ordres denses

On considère les formules du premier ordre construites sur $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{=, >\}$

La théorie des ordres denses est engendrée par les axiomes suivants :

Les axiomes de l'égalité (voir aussi section **??**) :

$$\begin{array}{llcl}
\forall x. & & & x = x \\
\forall x, y. & x = y & \rightarrow & y = x \\
\forall x, y, z. & (x = y \wedge y = z) & \rightarrow & x = z \\
\forall x, y, z & (x = y \wedge x > z) & \rightarrow & y > z \\
\forall x, y, z & (x = y \wedge z > x) & \rightarrow & z > y
\end{array}$$

Ordre strict :

$$\begin{array}{llcl}
\forall x. & & & \neg(x > x) \\
\forall x, y, z & (x < y \wedge y < z) & \rightarrow & x < z
\end{array}$$

Ordre total :

$$\forall x, y, \quad x > y \vee x = y \vee y > x$$

Ordre dense :

$$\forall x, y. \exists z. \quad (x > y \rightarrow (x > z \wedge z > y)$$

NoMin :

$$\forall x, \exists y. \quad x > y$$

NoMax :

$$\forall x, \exists y. \quad y > x$$

Théorème 10.2.1 *La théorie des ordres denses est décidable et complète.*

Preuve:

On s'appuie sur le lemme 1.1.1. On montre que, pour toute formule $\exists x.\phi$ où ϕ est sans quantificateurs, on peut effectivement calculer une formule ψ sans quantificateur telle que $\mathcal{O}_D \models (\exists x.\phi) \leftrightarrow \psi$.

Il suffit de considérer des formules ϕ en forme normale disjonctive, et donc des formules ϕ qui sont des conjonctions de formules atomiques. On peut supposer sans perte de généralité qu'aucune formule atomique n'est de la forme

$x \neq y$: on les remplace par $x > y \vee y > x$ (puis remettre en FND). De même, on peut remplacer $x \not> y$ par $x = y \vee y > x$, $x > x$ par $\bot$ et $x = x$ par $\top$. Si ϕ contient $x = y$ (ou $y = x$), alors $\exists x.\phi \models\!\mid \phi\{x \mapsto y\}$ et il suffit de choisir cette dernière formule pour ψ. Sinon, ϕ s'écrit $\bigwedge_{i \in I} x_i > x \wedge \bigwedge_{i \in J} x > x_i \wedge \phi'$, où ϕ' ne contient pas x.

- Si I est vide, $\exists x.\phi$ est équivalente 'a ϕ' (à cause de **NoMax**)
- Si J est vide, $\exists x.\phi$ est équivalente à ϕ' (à cause de **NoMin**)
- Si I, J sont non vides, alors, grâce à l'axiome de densité, et à la totalité,la formule est équivalente à $\phi' \wedge \bigwedge_{i \in I, j \in J} x_i > x_j$. En effet, si σ est une affectation qui satisfait cette formule, par totalité, $\min_{i \in I} x_i\sigma = x_{i_0}\sigma$ existe et $\max_{j \in J} x_j\sigma = x_{j_0}\sigma$ existe et de plus, $x_{i_0}\sigma >_{\mathcal{M}} x_{j_0}\sigma$. Par densité, il existe dans $\mathcal{M}$ un a tel que $x_{i_0}\sigma >_{\mathcal{M}} a >_{\mathcal{M}} x_{j_0}\sigma$. En étendant l'affectation σ en associant a à x, on obtient alors une affectation σ' telle que $\mathcal{M}, \sigma' \models \bigwedge_{i \in I} x_i > x \wedge \bigwedge_{i \in J} x > x_i \wedge \phi'$ et donc $\mathcal{M}, \sigma \models \exists x. \bigwedge_{i \in I} x_i > x \wedge \bigwedge_{i \in J} x > x_i \wedge \phi'$. Réciproquement, si $\mathcal{M}, \sigma \models \exists x. \bigwedge_{i \in I} x_i > x \wedge \bigwedge_{i \in J} x > x_i wedge \phi'$, par transitivité de l'ordre, $\mathcal{M}, \sigma \models \phi' \wedge \bigwedge_{i \in I, j \in J} x_i > x_j$.

Pour conclure, les seules formules sans variables sont les combinaisons booléenes de $\top, \bot$ et les hypothèses du lemme 1.1.1 sont donc satisfaites : la théorie est complète et décidable.

Exercice 201
Montrer que, si l'on remplace **NoMin** (resp. **NoMax**) par sa négation, on obtient à nouveau une théorie décidable et complète. En donner deux modèles non isomorphes.

Exercice 202
Montrer que, si l'on retire **NoMin** (resp. **NoMax**), la théorie engendrée reste décidable, mais est incomplète.

La procédure, telle qu'elle est décrite, est, a priori, non-élémentaire, puisque, pour chaque élimination de quantificateur, la formule sans quantificateur est mise en forme normale disjonctive, ce qui conduit a priori a une complexité exponentielle pour chacune de ces étapes. (La complexité est a priori une tour d'exponentielles dont la hauteur est proportionnelle au nombre de variables). Cependant, pour décider si ϕ est dans la théorie, la complétude de la théorie permet de se ramener au problème de savoir si $\mathbb{Q} \models \phi$, ce qu'on peut faire de manière plus efficace, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 203

1. Soit ϕ une formule de variables libres $x_1, \ldots, x_n$ et $\sigma_1 = \{x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n\}$, $\sigma_2 = \{x_1 \mapsto b_1, \ldots, x_n \mapsto b_n\}$ deux affectations à valeurs dans $\mathbb{Q}$ telles que $a_1 < \ldots < a_n$ et $b_1 < \ldots < b_n$. Montrer que $\mathbb{Q}, \sigma_1 \models \phi$ ssi $\mathbb{Q}, \sigma_2 \models \phi$.
2. Si $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ (dans $\mathbb{Q}$), et σ est une affectation $x_{i_1} \mapsto a_1, \ldots, x_{i_n} \mapsto a_n$ des variables libres $x_1, ..., x_n$ de $\forall x.\phi$, montrer que $\sigma \models \forall x.\phi$ ssi
   - ou bien $n = 0$ et $\{x \mapsto 0\} \models \phi$
   - ou bien $n > 0$ et toutes les propriétés suivantes sont satisfaites :
     - pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\sigma, \{x \mapsto a_i\} \models \phi$
     - $\sigma, \{x \mapsto a_1 - 1\} \models \phi$

  - $\sigma, \{x \mapsto a_n + 1\} \models \phi$
  - pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, $\sigma, x \mapsto \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \models \phi$.

3. Donner un équivalent de la question précédente lorsque la formule est existentielle.
4. Montrer que la théorie des ordres denses est dans PSPACE
5. Montrer que la théorie des ordres denses est PSPACE-complète.

10.3 La théorie de l'égalité

La théorie engendrée par les seuls axiomes de l'égalité est incomplète puisque

$$\mathcal{A}_{eq} \not\models \forall x, y.x = y \qquad \mathcal{A}_{eq} \not\models \exists x, y, x \neq y$$

Il existe en effet des modèles à un élément et des modèles à plus de un élément.

Nous utilisons alors une extension conservative. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ la formule :

$$E_n \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \exists x_1, \ldots, x_n. \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=i+1}^{n} x_i \neq x_j$$

Par convention, $E_0 = \top$.

Lemme 10.3.1 *$\mathcal{M} \models E_n$ ssi $|\mathcal{M}|$ a au moins n classes d'équivalence modulo l'interprétation de $=$.*

Preuve:
En effet, si $\mathcal{M} \models E_n$, alors il existe une affectation σ de $x_1, \ldots, x_n$ telle que $x_i\sigma =_{\mathcal{M}} x_j\sigma$ ssi $i = j$. $|\mathcal{M}$ contient alors au moins $x_1\sigma, \ldots, x_n\sigma$, qui sont non équivalents deux à deux. Réciproquement, si $|\mathcal{M}|$ contient n éléments $a_1, \ldots, a_n$ qui sont non-équivalents deux à deux, il suffit de choisir une affectation σ telle que $x_i\sigma = a_i$: $\mathcal{M}.\sigma \models \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=i+1}^{n} x_i \neq x_j$.

On utilise alors la théorie $\mathcal{A}_{eq}^{+}$ en ajoutant les variables proprositionnelles E_i au langage et les axiomes

$$E_n \leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n. \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=i+1}^{n} x_i \neq x_j$$

Cette axiomatisation n'est pas finie, mais reste récursive.

Théorème 10.3.1 *La théorie engendrée par $\mathcal{A}_{eq}^{+}$ est récursive.*

Preuve:
Nous nous appuyons à nouveau sur le lemme 1.1.1.

Si $\phi = \exists x.\phi_0$ où ϕ_0 est sans quantificateurs, on peut supposer sans perte de généralité que ϕ_0 est en forme normale disjonctive et il suffit de montrer comment éliminer le quantificateur existentiel lorsque ϕ_0 est une conjonction de formules atomiques. On remplace aussi $x \neq x$ par $\perp$ et $x = x$ par $\top$ et on simplifie la formule.

Si ϕ_0 est de la forme $x = y \wedge \phi_1$ (ou $y = x \wedge \phi_1$), avec y distinct de x, il suffit de remplacer x par y dans ϕ_1 pour obtenir une formule ψ telle que $\mathcal{A}_{eq}^+ \models (\phi \leftrightarrow \psi)$ (et ψ ne contient pas x).

Sinon, ϕ_0 s'écrit $x \neq x_1 \wedge \ldots \wedge x \neq x_n \wedge \phi'$ où ϕ' ne contient pas x. On note alors $\mathcal{E}(x_1, \ldots, x_n)$ l'ensemble des relationss d'équivalence sur l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Si R est une telle relation d'équivalence, on note encore n_R le cardinal du quotient par R. On montre alors que

$$\mathcal{A}_{eq}^+ \models \exists x.x \neq x_1 \wedge \ldots \wedge x \neq x_n \leftrightarrow \bigvee_{R \in \mathcal{E}(x_1,\ldots,x_n)} (E_{n_R+1} \wedge \bigwedge_{(x_i,x_j)\in R} x_i = x_j)$$

Si $\mathcal{M}$ est une structure et σ est une affectation de $x_1, \ldots, x_n$ dans $|\mathcal{M}|$ et $\mathcal{M}, \sigma \models \exists x.x \neq x_1 \wedge \ldots \wedge x \neq x_n$ alors il existe $a \in |\mathcal{M}|$, $a \neq_{\mathcal{M}} x_1\sigma, \ldots a \neq_{\mathcal{M}} x_n\sigma$. Donc, si R est la relation telle que $x_i R x_j$ ssi $x_i\sigma =_{\mathcal{M}} x_j\sigma$, $\mathcal{M}, \sigma \models E_{n_R+1} \wedge \bigwedge_{(x_i,x_j)\in R} x_i = x_j$.

Réciproquement, si, pour une relation R sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathcal{M}, \sigma \models E_{n_R+1} \wedge \bigwedge_{(x_i,x_j)\in R} x_i = x_j$, alors $|\mathcal{M}|$ contient au moins $n_R + 1$ classes d'équivalence, en particulier, il existe $a \in |\mathcal{M}|$ tel que $a \neq_{\mathcal{M}} x_1\sigma, \ldots a \neq_{\mathcal{M}} x_n\sigma$. Donc $\mathcal{M}, \sigma \models \exists x.x \neq x_1 \wedge \ldots \wedge x \neq x_n$.

Nons avons donc montré la première condition du lemme 1.1.1.

Les formules sans variables de cette théorie sont des combinaisons Booléennes de variables propositionnelles E_i. Soit ψ une telle formule. et N l'indice maximal d'une variable propositionnelle E_i apparaissant dans ψ. Nous montrons que

$$\mathcal{A}_{eq}^+ \models \psi \qquad \text{ssi} \qquad \{E_{i+1} \to E_i \mid i < N\} \models \psi$$

Si $\{E_{i+1} \to E_i \mid i < N\} \models \psi$, comme $\mathcal{A}_{eq}^+ \models E_{i+1} \to E_i$ pour tout i, $\mathcal{A}_{eq}^+ \models \psi$.

Réciproquement, si I est une interprétation des variables propositionnelles $E_0, \ldots, E_n$ qui falsifie $(\bigwedge_{i=1}^N E_{i+1} \to E_i) \to \psi$, alors $I = \{E_0, \ldots, E_k\}$. Si $\mathcal{M}$ est une structure dans laquelle le nombre de classes d'équivalence modulo $=_{\mathcal{M}}$ est exactement k, $\mathcal{M} \models E_0 \wedge \ldots \wedge E_k$ et $\mathcal{M} \not\models E_{k+1} \vee \ldots \vee E_n$. Il s'en suit (comme I falsifie ψ et par récurrence sur la formule propositionnelle) que $\mathcal{M} \not\models \psi$.

Pour décider si une formule ψ sans variable est une conséquence de la théorie, il suffit donc de décider de la validité de la formule propositionnelle $(\bigwedge_{i=1}^N E_{i+1} \to E_i) \to \psi$, ce qui peut se faire en temps exponentiel.

Par le lemme 1.1.1 $\mathsf{Th}(\mathcal{A}_{eq}^+)$ est donc récursive.

D'après le lemme 1.1.2, on obtient alors :

Corollaire 10.3.1 *$\mathsf{Th}(\mathcal{A}_{eq})$ est récursive.*

À nouveau, la méthode d'élimination de quantificateurs ne donne, a priori, qu'une borne de complexité non-élémentaire à la théorie. Mais on peut faire mieux, en utilisant une propriété de petit modèle ;

Exercice 204

1. Soit ϕ une formule close en forme prénexe dont le nombre de variables est n. Montrer que $\mathcal{A}_{eq} \models \phi$ si et seulement si, pour tout modèle $\mathcal{M}$ de cardinal au plus $n + 1$, $\mathcal{M} \models \phi$..

2. En déduire que la théorie engendrée par les axiomes de l'égalité est PSPACE-complet.

10.4 Autres exemples de théories décidables/complètes

10.4.1 La théorie des ordres discrets

Cette théorie (Sur $\mathcal{P} = \{=, \geq\}, \mathcal{F} = \emptyset$) est axiomatisée par les axiomes de l'égalité et les axiomes :

$$\begin{array}{ll}
(TO1) & \forall x.x \geq x \\
(TO2) & \forall x, y.(x \geq y \wedge y \geq x) \rightarrow x = y \\
(TO3) & \forall x, y, z.(x \geq y \wedge y \geq z) \rightarrow x \geq z \\
(TO4) & \forall x, y.(x \geq y \vee y \geq x) \\
(1) & \exists x.\forall y.y \geq x \\
(2) & \forall x.\exists y.y \geq x \wedge y \neq x \wedge (\forall z.(z \geq x \wedge z \neq y \rightarrow z \geq y)) \\
(3) & \forall x.(\forall y.y \geq x) \vee (\exists z.z \leq x \wedge z \neq x \wedge (\forall y.y \geq z \rightarrow (y = z \vee y \geq x)))
\end{array}$$

On étend la théorie en introduisant deux symboles de fonction 0 et s et les axiomes :

$$(D_1) \quad \forall x. \quad x = 0 \leftrightarrow \forall y.y \geq x$$

$$(D_2) \quad \forall x, y. \quad x = s(y) \leftrightarrow (y \geq x \wedge y \neq x \wedge \forall z.z \geq x \rightarrow (z = x \vee z \geq y))$$

Exercice 205

1. Montrer qu'on peut dériver les axiomes suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
\forall x. & & & & x \geq 0 \\
\forall x.x \neq 0 & & \rightarrow & \exists y.x = s(y) & \\
\forall x. & & & & 0 \neq s(x) \\
\forall x, y. & s(x) = s(y) & & \rightarrow & x = y
\end{array}$$

2. Montrer qu'il s'agit d'une extension conservative :

$$\mathsf{Th}(TOD) = \mathsf{Th}(TOD \cup \{D_1, D_2\}) \cap FO(\{\geq, =\}, \emptyset)$$

3. Montrer que la théorie des ordres discrets est complète et récursive.

Exercice 206

Montrer que TOD a des modèles dans lesquels l'ordre n'est pas bien fondé ; en déduire qu'on ne peut pas axiomatiser au premier ordre la bonne fondaison de l'ordre.

Exercice 207

Montrer que (TO_4) n'est pas une conséquence des autres axiomes de TOD

10.4.2 Théorie des corps réels clos