Logique informatique 2017-2018. Partiel

mars 2018. Durée 3h.

Exercice 1

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier les réponses.

1. En logique du premier ordre, toute formule est logiquement équivalente à une formule qui ne contient pas de quantification existentielle.
2. Dans le cas propositionnel, un jugement $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable en déduction naturelle ssi le séquent $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable en calcul des séquents.
3. En logique du premier ordre, si un système d'inférence est correct et permet de dériver $\bot$ de tout ensemble de formules insatisfaisables, alors il est complet.
4. En calcul propositionnel, si $I \subseteq \mathcal{P}$ et $J \subseteq \mathcal{P}$ sont deux modèles d'une formule ϕ construite sur les variables propositionnelles $\mathcal{P}$, alors $I \cap J \models \phi$.
5. Soit $\mathcal{F} = \{s\}$ où s est d'arité 1 et $\mathcal{P} = \{P\}$ où P est d'arité 1. On peut construire une formule qui a un et un seul modèle, de cardinal fini fixé (par exemple, 10), à isomorphisme près.

Exercice 2

Dans cet exercice, on considère les formules du calcul propositionnel construites sur un ensemble $\mathcal{P}$ de variables propositionnelles. Un *littéral* est une variable propositionnelle (dans ce cas c'est un littéral *positif*) ou sa négation (dans ce cas, c'est un littéral *négatif*). Une *clause* est une disjonction de littéraux. Une *clause de Horn* est une clause contenant au plus un littéral positif.

On considère le système de déduction composé des deux règles suivantes :

$$\frac{L \vee L \vee C}{L \vee C} \qquad \frac{L \quad \overline{L} \vee C}{C}$$

où L est un littéral, $\overline{L}$ le littéral complémentaire et C une clause.

On ne considère comme formules que les clauses.

Ce système d'inférence est-il réfutationellement complet ? complet ? réfutationellement complet pour les clauses de Horn ? complet pour les clauses de Horn ?

Justifier les réponses.

Exercice 3

Parmi les jugements suivants, lesquels sont valides ? Pour ceux qui sont valides, donner une preuve en déduction naturelle. Pour ceux qui ne sont pas valides, donner un contre-modèle. Dans chaque cas, l'ensemble de symboles de prédicat et l'ensemble de symboles de fonction sont arbitraires, mais contiennent bien sûr les symboles utilisés dans les formules.

1. $\vdash \forall x.\exists y.(P(y) \to P(x))$
2. $\vdash \exists x.\forall y.(P(y) \to P(x))$
3. $\vdash \exists x.(P(s(x)) \to P(x))$
4. $\forall x.(P(x) \land \neg P(s(x))) \vdash \forall x.\neg P(x)$