$$\frac{\Gamma, \phi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \Delta} \wedge \text{ left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi \quad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \wedge \psi} \wedge \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vee \psi \vdash \Delta} \vee \text{ left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \vee \psi} \vee \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \rightarrow \psi \vdash \Delta} \rightarrow \text{ left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \rightarrow \psi} \rightarrow \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi}{\Gamma, \neg\phi \vdash \Delta} \neg \text{ left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\phi} \neg \text{ right}$$

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A} \text{ Axiom}$$

FIGURE 2.7 – Le calcul $\mathbf{LK}_0^-$ : règles d'introduction

## 2.6 Calcul des séquents classiques (sans coupure)

On s'intéresse au problème de la satisfaisabilité : étant donné $\phi$, $\phi$ a-t-elle un modèle ? Ou au problème de la conséquence logique : est-ce que $\psi$ est une conséquence logique de $\phi$ ?

Remarquer qu'on a un algorithme : il suffit d'énumérer les $2^n$ interprétations. Mais il y a plusieurs inconvénients : c'est très lourd (pas efficace) et on ne peut pas généraliser au calcul des prédicats, par exemple.

**Definition 2.6.1** *Un* séquent *(propositionnel) est une paire de multi-ensembles finis de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, notée $\Gamma \vdash \Delta$.*

Cette définition suppose les propriétés d'associativité et de commutativité : $\Gamma, \Gamma' = \Gamma', \Gamma$ par exemple. On identifie également $\Gamma, \top$ avec $\Gamma$ d'une part et $\Delta, \perp$ avec $\Delta$ d'autre part, si $\Gamma$ est la partie gauche d'un séquent et $\Delta$ sa partie droite (en particulier lorsque $\Gamma$ ou $\Delta$ est vide).

Si $I$ est une interprétation, $I \models \Gamma \vdash \Delta$ si et seulement si $I \not\models \Gamma$ ou bien il existe une formule $\phi$ de $\Delta$ telle que $I \models \phi$.

Les règles de déduction du calcul des séquents propositionnel classique sans coupure (noté $\mathbf{LK}_0^-$dans la suite) sont données dans les figures 2.7 et 2.8.

**Lemme 2.6.1 (correction de $\mathbf{LK}_0^-$)** *Si $\Sigma$ est obtenu par application d'une règle d'inférence de la figure 2.7 aux séquents $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$, alors $I$ est un modèle de $\Sigma$ si et seulement si $I$ est un modèle de tous les séquents $\Sigma_i$.*

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}\ \text{weakening left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \phi}\ \text{weakening right}$$

$$\frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}\ \text{contraction left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi, \phi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi}\ \text{contraction right}$$

FIGURE 2.8 – Le calcul $\mathbf{LK}_0^-$ : règles structurelles

<u>Preuve:</u>
Par exemple pour $\rightarrow$ left. (Les autres cas sont laissés en exercice) Si $I \models \Gamma, \phi \rightarrow \psi \vdash \Delta$, alors, par définition, ou bien $I \not\models \Gamma, \phi \rightarrow \psi$, ou bien il existe une formule $\theta \in \Delta$ telle que $I \models \theta$.

**Premier cas : $I \not\models \Gamma, \phi \rightarrow \psi$.** Deux cas se présentent à nouveau :

- ou bien il existe une formule $\eta \in \Gamma$ telle que $I \not\models \eta$ et, dans ce cas, $I \models \Gamma \vdash \phi, \Delta$, $I \models \psi, \Gamma \vdash \Delta$,
- ou bien $I \not\models \phi \rightarrow \psi$. Par définition, ceci entraine que $I \models \phi$ et $I \not\models \psi$. Il en résulte que $I \not\models \psi, \Gamma$ et donc $I \models \psi, \Gamma \vdash \Delta$ d'une part et il existe une formule $\theta \in \phi, \Delta$ (en fait $\theta = \phi$) telle que $I \models \theta$ d'autre part. Ceci entraine $I \models \Gamma \vdash \phi, \Delta$.

Dans tous les cas, $I$ satisfait les deux prémisses.

**Deuxième cas : il existe une formule $\theta \in \Delta$ telle que $I \models \theta$** . Alors, par définition des modèles des séquents, $I \models \Gamma \vdash \phi, \Delta$ et $I \models \Gamma, \psi \vdash \Delta$.

Réciproquement, si $I$ satisfait les deux prémisses, alors

- ou bien $I \not\models \Gamma$ et $I \models \Gamma, \phi \rightarrow \psi \vdash \Delta$
- ou bien il existe $\theta \in \Delta$ telle que $I \models \theta$ et on conclut directement
- ou bien $I \not\models \psi$ et $I \models \phi$ et, dans ce cas, $I \not\models \phi \rightarrow \psi$, ce qui entraine à nouveau la conclusion voulue.

$\square$

**Exercice 37 (2)**
Compléter la preuve du lemme 2.6.1.

**Exercice 38 (2)**
Peut on remplacer la règle d'introduction de la flèche à droite par la règle suivante :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \rightarrow \psi}\ \rightarrow \text{right}$$

Justifier la réponse.

**Exercice 39 (2)**
Peut on remplacer la règle d'introduction de la flèche à gauche par la règle suivante :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma, \psi \to \phi \vdash \Delta} \to \text{left}$$

Un *arbre de preuve* obtenu à l'aide des règles de $\mathbf{LK}_0^-$ est un arbre dont les noeuds sont étiquetés par des séquents, chaque étiquette d'un noeud étant obtenue par application d'une des règles aux étiquettes de ses fils.

**Exemple 2.6.1**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{axiom}}{A, B \vdash A}\,\text{weak-l} \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,\text{axiom}}{A, B \vdash B}\,\text{weak-l}}{A, B \vdash A \wedge B}\,\wedge\ \text{right}}{A \vdash B \to (A \wedge B)}\,\to \text{right}}{\vdash A \to (B \to (A \wedge B))}\,\to \text{right}$$

**Exercice 40 (1)**
Donner une preuve du tiers exclu $\vdash \phi \vee \neg\phi$.

Un séquent $\Sigma$ est *prouvable* (sous-entendu à l'aide de $\mathbf{LK}_0^-$) s'il existe un arbre de preuve dont la racine est étiquetée par $\Sigma$. On dit aussi que $\Sigma$ est un *théorème.*

**Exercice 41 (5)**
**(Théorème de la déduction)** Montrer, sans utiliser le théorème de complétude qui suit, que $\Gamma, \phi \vdash \Delta, \psi$ est prouvable en $\mathbf{LK}_0^-$ ssi $\Gamma \vdash \Delta, \phi \to \psi$ est prouvable en $\mathbf{LK}_0^-$.

**Lemme 2.6.2** *Si $\Gamma, \Delta$ ne contiennent que des variables, le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est valide si et seulement si $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$.*

Preuve:
Si le séquent est valide, pour toute interprétation $I$, $I \models \Gamma \vdash \Delta$. Prenons l'interprétation $I$ qui associe 1 à toutes la variables de $\Gamma$ et 0 à toutes les autres variables propositionnelles. $I \models \Gamma$ et donc il existe $\theta \in \Delta$, $I \models \theta$, ce qui signifie que l'une des variables de $\Delta$ est interprétée à 1 et donc que $\Delta \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Réciproquement, si $A \in \Delta \cap \Gamma$, pour toute interprétation $I$, ou bien $I(A) = 1$ et il existe une formule $\theta \in \Delta$ telle que $I \models \theta$, ou bien $I(A) = 0$ et $I \not\models \Gamma$. □

**Théorème 2.6.1 (Complétude)** *Un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est valide si et seulement s'il est prouvable à l'aide des règles de la figure 2.7.*

Preuve:
Si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable, on montre par récurrence sur la longueur de la preuve que $\Gamma \vdash \Delta$ est valide : le cas de base est donné par le lemme 2.6.2 et la récurrence par le lemme 2.6.1.

Réciproquement, si $\Gamma \vdash \Delta$ est valide, on montre le résultat par récurrence sur le nombre de connecteurs logiques de $\Gamma$ et $\Delta$. Si ce nombre est nul,

- ou bien $\top \in \Delta : \Delta = \top, \Delta'$ et, dans ce cas, $\overline{\Gamma, \top \vdash \top, \Delta'}\, Ax$ et, par hypothèse, $\Gamma, \top = \Gamma$
- ou bien $\bot \in \Gamma : \Gamma = \bot, \Gamma'$ et, dans ce cas, $\overline{\bot, \Gamma' \vdash \bot, \Delta}\, Ax$ et, par hypothèse, $\Delta = \bot, \Delta$.
- bien $\Gamma, \Delta$ ne contiennent que des variables propositionnelles et on applique le lemme 2.6.2.

Supposons maintenant que $\Gamma = \phi \to \psi, \Gamma'$ (resp. $\phi \vee \psi, \Gamma'$, resp. $\phi \wedge \psi, \Gamma'$, resp. $\neg\phi, \Gamma'$). Par le lemme 2.6.1, $\Gamma' \vdash \phi, \Delta$ et $\Gamma', \psi \vdash \Delta$ sont valides. Par hypothèse de récurrence, ces deux séquents sont prouvables, et donc $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable par la règle $\to$ left. Les règles d'introduction gauche de $\wedge, \vee, \neg$ permettent de conclure de manière analogue pour les autres connecteurs logiques à gauche. Les règles droites permettent de conclure de manière analogue pour les connecteurs logiques à droite. □

Le calcul des séquents $\mathbf{LK}_0$est obtenu en ajoutant aux règles de $\mathbf{LK}_0^-$la règle de *coupure* :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \quad \Gamma' \vdash \phi, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(Cut)$$

Bien entendu, $\mathbf{LK}_0$est complet et la règle (cut) n'est pas nécéssaire pour ce résultat. On peut montrer que les coupures sont inutiles, par transformation des preuves (sans utiliser de résultat de complétude), mais cette preuve d'élimination des coupures est hors du champ de ce cours.

**Exercice 42 (3)**
Donner des règles d'introduction à gauche et à droite de $\leftrightarrow$, dans le style de $\mathbf{LK}_0^-$.

**Exercice 43 (5)**

1. Montrer que, si l'on retire la règle d'affaiblissement à **NK**, le système de déduction reste complet.
2. Montrer que, si l'on retire les règles d'introduction de $\vee$ à **NK**, le système de déduction n'est plus complet.

**Exercice 44 (6)**
Montrer qu'il existe une preuve de taille polynômiale (en $n$)du séquent

$$\vdash \neg A_1 \wedge A_2,\ \neg A_2 \wedge A_3,\ \ldots\ , \neg A_{n-1} \wedge A_n,\ \neg A_n \wedge A_1,\ A_1 \wedge \ldots \wedge A_n,\ \neg A_1 \wedge \ldots \neg A_n$$

**Exercice 45 (3)**
Expliquer pourquoi l'algorithme de décision de la validité résultant du théorème ci-dessus est exponentielle dans la taille du séquent.

**Exercice 46 (7)**
A chaque séquent valide $\Sigma$ on associe la taille de sa preuve de taille minimale (la taille d'une preuve est le nombre de noeuds de l'arbre), $\tau(\Sigma)$. On note aussi $|\Sigma|$ la taille du séquent $\Sigma$ (nombre de connecteurs logiques dans $\Sigma$).

Montrer qu'il existe une suite de séquents valides $\Sigma_n$ telle qu'il n'existe aucun polynôme $P$ vérifiant $P(|\Sigma_n|) \geq \tau(\Sigma_n)$.

**Exercice 47 (4)**
**(Théorème d'interpolation)** On appelle *partition* d'un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ un quadruplet $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_1, \Delta_2)$ tel que $\Gamma_1, \Gamma_2$ est une partition de $\Gamma$ et $\Delta_1, \Delta_2$ est une partition de $\Delta$.

Montrer que si on peut dériver $\Gamma \vdash \Delta$, alors il existe une partition de $\Gamma \vdash \Delta$ et une formule $\phi$ tels que $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \phi$ et $\Gamma_2, \phi \vdash \Delta_2$ sont prouvables et les variables de $\phi$ sont dans $Var(\Gamma_1 \cup \Delta_1) \cap Var(\Gamma_1 \cup \Delta_2)$.

**Exercice 48 (5)**
**(Calcul des séquents et déduction naturelle)** Dans cet exercice, on s'interdit d'utiliser les théorèmes de complétude : on veut montrer une méthode effective de traduction d'un système de preuve dans l'autre. Soit $\mathbf{LK}_0$le calcul des séquents avec la règle de coupure.

1. Montrer que, si le jugement $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable en $\mathbf{NK}_0$, alors le séquent $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans $\mathbf{LK}_0$.
2. Montrer que $\Gamma \vdash \phi_1, \ldots, \phi_n$ (où $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sont des formules) est prouvable en $\mathbf{LK}_0$ssi $\Gamma, \neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n \vdash\perp$ est prouvable en $\mathbf{LK}_0$.
3. Montrer que si $\Gamma \vdash \phi_1, \ldots, \phi_n$ est prouvable dans $\mathbf{LK}_0$, alors $\Gamma, \neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n \vdash\perp$ est prouvable dans $\mathbf{NK}_0$.
4. Montrer que, si $\Gamma \vdash \phi_1, \ldots, \phi_n$ est prouvable dans $\mathbf{LK}_0$, alors $\Gamma \vdash \phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$ est prouvable dans $\mathbf{NK}_0$.

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\,(Ax) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \psi \vdash \phi}\,(Aff) \qquad \frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\,(Abs)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}\,(\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi}\,(\wedge E_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\wedge E_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\,(\vee I_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\,(\vee I_2) \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta}\,(\vee E)$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi}\,(\neg I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \bot}\,(\neg E)$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \to \psi}\,(\to I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \to \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\to E)$$

FIGURE 2.9 – Règles d'inférence de la déduction naturelle propositionnelle classique $\mathbf{NK}_0$

## 2.7 Déduction naturelle

### 2.7.1 Syntaxe

Les énoncés en déduction naturelle, appelés *jugements* sont des expressions $\Gamma \vdash \phi$ où $\Gamma$ est un ensemble fini de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ et $\phi$ est une formule de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$. Il faut comprendre de tels jugements comme "De l'ensemble d'hypothèses $\Gamma$ on peut déduire $\phi$". Inclure les hypothèses dans le jugement permet par exemple d' énoncer de manière naturelle (et formelle) que, si l'on veut prouver $\phi \to \psi$, sous les hyothèses $\Gamma$, il suffit de montrer $\psi$ sous les hypothèses $\Gamma, \phi$.

### 2.7.2 Sémantique (classique)

Si $I$ est une interprétation des variables propositionnelles, $I \models \Gamma \vdash \phi$ si, ou bien il existe une formule $\psi \in \Gamma$ telle que $I \not\models \psi$, ou bien $I \models \phi$.

### 2.7.3 Déduction naturelle classique

Les règles d'inférence de la déduction naturelle classique propositionnelle, appelée $\mathbf{NK}_0$ sont données dans la figure 2.9.

**Proposition 2.7.1** *Tout jugement prouvable dans $\mathbf{NK}_0$ est valide.*

**Exemple 2.7.1** On peut prouver par exemple la double négation dans $\mathbf{NK}_0$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\phi,\neg\phi\vdash\neg\neg\phi}\;(Ax)\qquad\dfrac{}{\neg\neg\phi,\neg\phi\vdash\neg\neg\phi}\;(Ax)}{\neg\neg\phi,\neg\phi\vdash\perp}\;(\neg E)}{\neg\neg\phi\vdash\phi}\;(Abs)$$

**Exercice 49 (5)**
Montrer comment dériver le tiers exclu $\vdash P\vee\neg P$ dans $\mathbf{NK}_0$.

**Lemme 2.7.1** *Si $\Gamma,\phi\vdash\psi$ et $\Gamma\vdash\phi$ sont prouvables dans $\boldsymbol{NK}_0$, alors $\Gamma\vdash\psi$ est prouvable.*

Preuve:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma,\phi\vdash\psi}{\Gamma\vdash\phi\to\psi}\;(\to I)\qquad\Gamma\vdash\phi}{\Gamma\vdash\psi}\;(\to E)$$

□

**Lemme 2.7.2** *$\neg(\phi\vee\psi)\vdash\neg\phi$ et $\neg(\phi\vee\psi)\vdash\neg\psi$ sont prouvables dans $\boldsymbol{NK}_0$.*

Preuve:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\phi_1\vee\phi_2),\phi_2\vdash\neg(\phi_1\vee\phi_2)}\;(Ax)\qquad\dfrac{\dfrac{}{\neg(\phi_1\vee\phi_2),\phi_2\vdash\phi_2}\;(Ax)}{\neg(\phi_1\vee\phi_2),\phi_2\vdash\phi_1\vee\phi_2}\;(\vee I_2)}{\neg(\phi_1\vee\phi_2),\phi_2\vdash\perp}}{\neg(\phi_1\vee\phi_2)\vdash\neg\phi_2}\;(\neg I)$$

□

**Lemme 2.7.3** *Si $\Gamma,\phi,\psi\vdash\theta$ est prouvable, alors $\Gamma,\phi\wedge\psi\vdash\theta$ est prouvable.*

Preuve:

$$\dfrac{\Gamma,\phi,\psi\vdash\theta}{\Gamma,\phi,\psi,\phi\wedge\psi\vdash\theta}\;Aff$$

et

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,\phi,\phi\wedge\psi\vdash\phi\wedge\psi}\;Ax}{\Gamma,\phi,\phi\wedge\psi\vdash\psi}\;\wedge E$$

Donc, d'après le lemme 2.7.1, $\Gamma,\phi,\phi\wedge\psi\vdash\theta$ est prouvable.

$$\dfrac{\overline{\Gamma,\phi\wedge\psi\vdash\phi\wedge\psi}}{\Gamma,\phi\wedge\psi\vdash\phi}\;\wedge E$$

Donc, d'après le lemme 2.7.1 à nouveau, $\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \theta$ est prouvable.

□

**Théorème 2.7.1 (Complétude)** *Si $\Gamma$ est un ensemble fini de formules et $\phi$ est une formule telles que $\Gamma \models \phi$, alors $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans $\boldsymbol{NK}_0$.*

Preuve:
Noter d'abord que $\Gamma \models \phi$ est équivalent à la validité de $\Gamma \vdash \phi$.

On considère la mesure suivante sur les formules : $w(\bot) = 0 = w(P) = w(\neg P)$ si $P$ est une variable propositionnelle, $w(\neg\phi) = 1 + w(\phi)$ si $\phi$ n'est pas une variable propositionnelle et $w(\phi \vee \psi) = 2 + w(\phi) + w(\psi) = w(\phi \to \psi) = w(\phi \wedge \psi)$. $w(\Gamma \vdash \phi) = w(\phi) + \sum_{\psi\in\Gamma} w(\psi)$. On montre le résultat par récurrence sur $w(\Gamma \vdash \phi)$.

**Cas de base** $w(\Gamma \vdash \phi) = 0$ lorsque $\phi = \top$, $\phi =\bot$ ou $\Gamma, \phi$ ne contiennent que des littéraux.

On distingue 3 cas :

**Cas 1 :** $\phi = \top$ il suffit d'appliquer la règle correspondante du calcul.

**Cas 2 : $\Gamma$ est insatisfaisable** (ce qui est le cas lorsque $\phi =\bot$).

– Si $\bot\in \Gamma$, alors $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable pour toute formule $\phi$ :

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg\phi \vdash\bot}\,Ax}{\Gamma \vdash \phi}\,Abs$$

– Sinon, Soit $I_\Gamma$ l'interprétation qui contient exactelement les variables propositonnelles de $\Gamma$. $I_\Gamma$ doit falsifier une formule de $\Gamma$. Comme $\Gamma$ ne contient que des littéraux, il existe une variable propositionnelle $P \in I_\Gamma$ telle que $\neg P \in \Gamma$. Dans ce cas, $\Gamma = \Gamma_1, P, \neg P$ et

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash P}\,Ax \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash \neg P}\,Ax}{\Gamma \vdash\bot}\,\neg E}{\Gamma, \neg\phi \vdash\bot}\,Aff}{\Gamma \vdash \phi}\,Abs$$

**Cas 3 : $\Gamma$ est satisfaisable et** $\phi \notin \{\top, \bot\}$ : Si $\phi \in \mathcal{P}$, soit $I_\Gamma$ l'interprétation définie par $I_\Gamma = \mathcal{P} \cap \Gamma$. $I_\Gamma$ satisfait toutes les formules de $\Gamma$, puisque $\Gamma$ ne contient pas une variable propositionnelle et sa négation ($\Gamma$ serait insatisfaisable). $\Gamma \models \phi$ entraine alors que $I_\Gamma \models \phi$. Il en résulte $\phi \in I_\Gamma$ et donc $\phi \in \Gamma$.

Si $\phi = \neg P$ avec $P \in \mathcal{P}$, soit $I$ l'interprétation définie par $I = \{Q | \neg Q \notin \Gamma\}$. Comme $\Gamma$ ne contient pas une variable propositionnelle et sa négation, $I$ satisfait toutes les formules de $\Gamma$. Par conséquent $I \models \phi$. Donc $P \notin I$ et donc $\neg P \in \Gamma$ par construction. Il en résulte que, à nouveau, $\phi \in \Gamma$.

Dans tous les cas $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable par la règle Axiome.