TD 11
$O(M(n)) = O(I(n))^*$
$LP_{TUM} = ILP_{TUM}$
$ILP \in NP - c$

1 $O(M(n)) = O(I(n))$

Exercice 1. 1. *Calculer l'inverse de*

$$D = \begin{pmatrix} I_n & A & 0 \\ 0 & I_n & B \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}$$

ou A et B sont des matrices $n \times n$ et I_n et la matrice identite.

2. *Si on peut inverser une matrice $n \times n$ en temps $I(n)$, ou*

   - $I(n) = \Omega(n^2)$
   - $I(3n) = O(I(n))$

   alors on peut multiplier deux matrices $n \times n$ en temps $O(I(n))$

3. *Supposer que A $(n \times n)$ est une matrice symétrique définie positive avec $n = 2^k$ (pour un $k \in \mathbb{N}_+$).*

   Alors $A = \begin{pmatrix} B & C^T \\ C & D \end{pmatrix}$ (ou B, C, D sont des matrices $n/2 \times n/2$). Noter $S = D - CB^{-1}C^T$.

   - *Montrer que n'importe quelle matrice symétrique définie positive X est inversible.*
   - *Montrer que B est symétrique définie positive.*
   - *Montrer que B^{-1}, $CB^{-1}C^T$ et $D - CB^{-1}C^T$ sont symmetriques.*

*offre soumise à conditions

- *Si* $x^T = (y^T z^T)$ *(ou* y^T *est compatible avec* B *et* z^T *est compatible avec* D*), montrer que*

$$x^T Ax = (y + B^{-1}C^T z)^T B(y + B^{-1}C^T z) + z^T (D - CB^{-1}C^T)z$$

- *Conclure que* S^{-1} *existe.*

4. *Montrer que*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} + B^{-1}C^T S^{-1}CB^{-1} & -B^{-1}C^T S^{-1} \\ -S^{-1}CB^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}$$

5. *Montrer que* $B^{-1}C^T = (CB^{-1})^T$ *et que* $B^{-1}C^T S^{-1} = (S^{-1}CB^{-1})^T$.

6. *Montrer qu'on peut calculer* A^{-1} *en utilisant* 4 *multiplications de matrices* $n/2 \times n/2$ *et deux inversions de matrices* $n/2 \times n/2$.

7. *Conclure qu'on peut inverser une matrice symmetrique définie positive* $n \times n$ *en temps* $O(M(n))$ *si:*

   - *on peut multiplier deux matrices* $n \times n$ *en temps* $M(n)$
   - $M(n) = \Omega(n^2)$
   - $M(n + k) = O(M(n))$ *(si* $0 \leq k \leq n$*)*
   - $M(n/2) \leq cM(n)$ *pour une constante* $c < 1/2$

8. *Montrer que* $A^T A$ *est une matrice symétrique définie positive si* A *est inversible.*

9. *Utiliser* $A^{-1} = (A^T A)^{-1}A^T$ *et conclure.*

2 $LP_{TUM} = ILP_{TUM}$

Exercice 2. *On dit qu'une matrice est* totalement unimodulaire *si toute sous-matrice carrée* inversible *est de déterminant* ± 1 *(autrement dit, le déterminant de toute sous-matrice carrée est* 0*,* 1 *ou* -1*). (Et cela concerne également les sous-matrices de taille* 1×1*).*

1. *Justifier l'équivalence du problème de la programmation linéaire en nombres entiers et du problème général dans le cas de matrices totalement unimodulaire. C'est-à-dire: si* A *est une matrice* $m \times n$ *d'entiers totalement unimodulaire,* b *est un* m*-vecteur d'entiers, alors toutes les solutions de* $Ax = b, x \geq 0$ *sont entières.*

2. *Avec les mêmes conditions, montrer que les solutions de* $Ax \leq b, x \geq 0$ *sont également entières.*

3. *Montrer qu'une matrice d'entiers* A *avec* $a_{i,j} = 0, \pm 1$ *est* TUM *si chaque colonne contient au plus deux entiers* $\neq 0$ *et s'il existe une partition* $I_1 \uplus I_2$ *des lignes de* A *t.q.*

   - *si une colonne a deux elements de meme signe alors les deux lignes correspondantes sont dans des ensemble differents (i.e. une ligne dans* I_1*, l'autre dans* I_2*).*
   - *si une colonne a deux entrees avec des signes differents, alors les deux lignes correspondantes sont dans le meme ensemble* I_i *(*$i \in \{1, 2\}$*)*

   (indication: induction sur la taille de A*)*

4. *Conclure que les formulation LP pour le plus court chemin et le flot maximum sont* TUM*.*

3 NP-completude

Exercice 3. *NP-completude du probleme de PL en nombres entiers On considere le probleme de PL en nombres entiers* $Ax = b$*,* $x \geq 0$ *ou* A *est une matrice* $m \times n$ *d'entiers et* b *est un* m*-vecteur d'entiers et la solution* x *doit etre un vecteur d'entiers. On fixe* $a = \max_{i,j}(|a_{i,j}|, |b_i|)$*.*

- *Montrer que le probleme est NP-difficile: transformer une instance de 3-SAT en une instance du probleme en remplacant chaque formule atomique* A_i *par deux variables entieres* x_i *et* y_i *liees par* $x_i + y_i = 1$*.*
- *On suppose que le probleme a une solution. Montrer alors qu'il existe une solution* x *telle que* $\max_i x_i \leq 2n^2(ma)^{2m+1}$*. Pour cela, on considere une solution avec* $\max_i x_i$ *minimal.*
  - *On pose* $M = (ma)^m$*. Conclure dans le cas* $\max_i x_i \leq M$*.*
  - *On suppose que les* k *premieres composantes de* x *sont plus grandes que* M*. Soient* $v_1, \ldots, v_k$ *les* k *premieres colonnes de* A*. Conclure dans le cas ou il existe des* α_i *entiers* $\leq M$ *tels que* $\Sigma_i \alpha_i v_i = 0$*.*
  - *Sinon, on peut extraire une matrice* $k \times k$ *inversible* V *des* v_i*. En resolvant le systeme* ${}^tVu = 1$*, on peut obtenir un vecteur ligne* h *de taille* m*. En utilisant les formules de Cramer, borner* h *et conclure.*
- *Montrer que le probleme est NP-complet.*