Exercice 2 (3).

1. Montrer que la définition 2.1.1 a bien un sens, c'est à dire qu'il existe bien un (et un seul) plus petit ensemble A (au sens de l'inclusion) qui satisfasse les conditions de la définition si $\mathcal{P}$ est un ensemble de *variables propositionnelles* :
   - les constantes $\top, \bot$ sont dans A
   - $\mathcal{P} \subseteq A$
   - si $\phi \in A$ alors $\neg\phi \in A$
   - si $\phi, \psi \in A$ alors $\phi \vee \psi, \phi \wedge \psi, \phi \to \psi \in A$
2. Montrer le principe de récurrence sur les formules : soit $R \subseteq \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$. Si $\bot \in R, \top \in R, \mathcal{P} \subseteq R$ et que $\forall \phi, \psi \in R$, $\neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \to \psi \in R$, alors $R = \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$.

Exercice 3 (1). Lorsque $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$, donner l'ensemble de tous les modèles de la formule $\phi \stackrel{\text{def}}{=} ((P \to Q) \vee (\neg P \to \neg Q)) \wedge ((Q \wedge R) \to \neg P)$

Exercice 4 (1). Montrer que :

1. ϕ est insatisfaisable si et seulement si $\neg\phi$ est valide
2. $\phi \models \psi$ si et seulement si $\phi \to \psi$ est valide.

Exercice 5 (4). Montrer que, si $\mathcal{P}$ est fini, alors dans tout ensemble de formules fini de cardinal assez grand (on précisera cette borne), il existe deux formules logiquement équivalentes (i.e. qui ont même ensembles de modèles).

Exercice 6 (5).

1. Montrer que, lorsque $\mathcal{P}$ est fini, pour tout ensemble d'interprétations S, il existe un ensemble de formules E tel que S est exactement l'ensemble des modèles de E.
2. Montrer que ce résultat est faux lorsque $\mathcal{P}$ est infini.

Exercice 7 (6). Donner un exemple d'un ensemble de formules dont l'ensemble des modèles est infini et dénombrable.

Exercice 8 (5). (théorème d'interpolation) Soient ϕ, ψ telles que $\phi \models \psi$. Montrer qu'il existe une formule θ telle que $\phi \models \theta$, $\theta \models \psi$ et les variables propositionnelles apparaissant dans θ, apparaissent aussi dans ϕ et dans ψ.

Exercice 9 (6). (théorème de compacité) $\{0, 1\}$ est muni de la topologie pour laquelle tout sous-ensemble est un ouvert. $\{0, 1\}$ muni de cette topologie est ainsi un compact. L'ensemble $\{0, 1\}^A$ des interprétations des formules propositionnelles construites sur A est alors muni de la topologie produit : les ouverts sont les unions de produits des ouverts de $\{0, 1\}$. Tout produit de compacts étant compact (ce qui est admis), l'espace $\mathcal{I}$ de toutes les interprétations est ainsi un compact.

1. Montrer que, pour toute formule ϕ, l'ensemble des interprétations qui satisfont ϕ est un fermé de $\mathcal{I}$.
2. En déduire que tout ensemble de formules insatisfaisable contient un sous-ensemble fini insatisfaisable.

Exercice 10 (1). Les connecteurs logiques ne sont pas tous indépendants. Par exemple, pour toutes formules ϕ et ψ, $\phi \to \psi$ est logiquement équivalent à $\neg\phi \vee \psi$. Le démontrer.

Exercice 11 (2). Montrer que $\vee, \wedge, \neg$ sont définissables à l'aide du seul connecteur $\to$ et de la constante $\bot$. On dit alors que l'ensemble $\{\to, \bot\}$ est *fonctionnellement complet*.

Exercice 12 (3). Plus généralement, les connecteurs logiques peuvent être vus comme des fonctions Booléennes. Si F est un ensemble de fonctions Booléennes, on note $A(F)$ l'ensemble de toutes les fonctions Booléennes obtenues à l'aide des fonctions de F et de la composition et des projections (fonctions $\pi_n^i(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_i$).

Pour tout entier $n \geq 1$ on note d_n (resp. c_n) la fonction Booléenne à n arguments qui renvoie 0 (resp. 1) si et seulement si tous ses arguments valent 0 (resp. 1).

1. Montrer que, pour tous $n, m, k \geq 2$, $A(c_n, f_\neg) = A(d_m, f_\neg)$ contient toutes les fonctions Booléennes à k arguments.
2. Montrer que $f_\neg$ n'est pas dans $A(f_\vee, f_\wedge, f_\rightarrow, f_\leftrightarrow)$

Exercice 13 (4). Donner un connecteur logique binaire qui est, seul, fonctionnellement complet.

Exercice 14 (5). Montrer que $\{\leftrightarrow, \neg\}$ n'est pas fonctionnellement complet.

Exercice 15 (6). Un ensemble de formules E est *indépendant* si, pour toute formule $\phi \in E$, $E \setminus \{\phi\} \not\models \phi$.

1. Montrer que, pour tout ensemble fini de formules E, il existe un sous-ensemble fini $E' \subseteq E$ indépendant tel que, pour tout $\phi \in E$, $E' \models \phi$.
2. Montrer que, pour tout ensemble dénombrable E de formules, il existe un ensemble E' de formules tel que E' est indépendant et, pour toute formule $\phi \in E'$, $E \models \phi$, pour toute formule $\psi \in E$, $E' \models \psi$.
3. Montrer qu'il n'est pas toujours possible d'avoir (en plus) $E' \subseteq E$.

Exercice 16 (8). On considère n coffres, chacun contenant un trésor ou une bombe. Le problème est de déterminer le contenu exact de chacun des coffres. Pour cela, on peut poser par écrit une liste de N questions (formules du calcul propositionnel, les variables propositionelles étant le contenu des coffres). On obtient, une fois la liste complète des questions établies, la réponse (i.e. l'interprétation) aux N questions. Mais il est possible que (au plus) k des N réponses soient incorrectes.

Etant donnés n, k, on s'intéresse au problème de trouver le N minimal, et les questions correspondantes, de manière à déterminer à coup sûr le contenu des coffres.

Donner le N minimal (et les questions correspondantes) dans les cas suivants.

1. $k = 0$ et n quelconque
2. $n = k = 1$
3. $n \leq 5$, $k = 1$
4. $k = 1$ et n quelconque

Prendre soin dans chaque cas de justifier la réponse.

Exercice 17 (3). Montrer qu'un graphe est coloriable avec k couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes finis est coloriable avec k couleurs.

Exercice 18 (5). Soit E un ensemble de formules du calcul propositionnel sur $\mathcal{P}$. On dira que E est *maximal cohérent* si E est satisfaisable et que, pour toute formule ϕ du calcul propositionnel, ou bien $\phi \in E$ ou bien $E \cup \{\phi\}$ est insatisfaisable.

1. Supposant que $\mathcal{P}$ est fini, montrer que tout ensembe de formules E satisfaisable est contenu dans un ensemble maximal cohérent.
2. Montrer que cet ensemble maximal cohérent n'est pas unique : donner (toujours dans le cas où $\mathcal{P}$ est fini) un ensemble E et deux ensembles maximaux cohérents distincts contenant E.
3. Que devient le résultat de la première question lorsque $\mathcal{P}$ est infini dénombrable ?

Exercice 19 (7). Soit Σ un ensemble de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$. On dit que Σ est *préservé par intersections finies* si, l'intersection de deux modèles de Σ est un modèle de Σ. Σ est *préservé par intersections* si toute intersection de modèles de Σ est un modèle de Σ. Σ est *axiomatisé* par Γ si, pour tout $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, $\Gamma \models \phi$ si et seulement si $\Sigma \models \phi$.

1. Montrer que Σ est préservé par intersections finies si et seulement si Σ est préservé par intersections.
2. Une *clause* est une formule
$$A_1 \vee \ldots \vee A_n$$
dans laquelle les A_i sont des variables propositionnelles (appelés *littéraux positifs*) ou des négations de variables propositionnelles (appelées *littéraux négatifs*). Une *clause de Horn* est une clause contenant au plus un littéral positif.
Montrer que Σ est axiomatisable par un ensemble de clauses de Horn si et seulement si Σ est stable par intersections. (On pourra supposer, sans perte de généralité, que Σ est un ensemble de clauses).