

## λ-Calcul et Logique Informatique

David Baelde  
baelde@lsv.ens-cachan.fr

### Exercice 1 — Système $\mathcal{D}$ (types intersection)

On considère le système de types suivant :

$$\frac{}{\Gamma, x : T \vdash x : T} \quad \frac{\Gamma, x : T \vdash M : T'}{\Gamma \vdash \lambda x.M : T \rightarrow T'} \quad \frac{\Gamma \vdash M : T \rightarrow T' \quad \Gamma \vdash N : T}{\Gamma \vdash M N : T'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : T_1 \quad \Gamma \vdash M : T_2}{\Gamma \vdash M : T_1 \cap T_2} \quad \frac{\Gamma \vdash M : T_1 \cap T_2}{\Gamma \vdash M : T_i}$$

1. Pour chacun des termes suivants, donner un type que ce terme admet dans le système  $\mathcal{D}$  :  $\lambda x. x x$ ,  $\lambda x \lambda y. x (y x)$ ,  $(\lambda x. x x) (\lambda y. y)$ .
2. Quelle est la différence avec les règles de la conjonction/paire? Quel sens ce système peut-il avoir dans le contexte du typage des langages de programmations?
3. Parmi les types suivants, donner un terme pour ceux qui sont habités (on ne tentera pas de prouver qu'un type n'est pas habité) :
  - $((\alpha \cap \beta) \rightarrow \tau) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \tau$
  - $(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \tau) \rightarrow (\alpha \cap \beta) \rightarrow \tau$
  - $((\tau \rightarrow \alpha) \cap (\tau \rightarrow \beta)) \rightarrow \tau \rightarrow (\alpha \cap \beta)$
  - $(\tau \rightarrow (\alpha \cap \beta)) \rightarrow ((\tau \rightarrow \alpha) \cap (\tau \rightarrow \beta))$
4. Proposer une définition pour  $\text{Red}_{T \cap T'}$  et montrer que tout terme typable dans le système  $\mathcal{D}$  est fortement normalisant.
5. Montrer que pour tout terme  $u$  en forme normale il existe  $\Gamma$  et  $T$  tels que  $\Gamma \vdash u : T$ . Indice : on a vu une façon pratique d'écrire une forme normale.
6. Montrer que tout terme fortement normalisant est typable dans  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 2 — Système  $\mathcal{D}_\omega$**

On étend le système  $\mathcal{D}$  en ajoutant un type atomique spécial noté  $\Omega$ , et la règle de typage suivante :

$$\overline{\Gamma \vdash M : \Omega}$$

1. Donner un terme typable dans  $\mathcal{D}_\omega$  mais pas dans  $\mathcal{D}$ . En termes calculatoires, quelle propriété de typage a-t-on perdu ? nous reste-t-il quelque chose d'intéressant ?
2. Montrer que  $u \rightarrow u'$  et  $\Gamma \vdash u' : T$  implique  $\Gamma \vdash u : T$ .
3. Montrer que tout terme faiblement normalisant est typable dans  $\mathcal{D}_\omega$  par un type sans  $\Omega$ .

On va voir que la réciproque est vraie si on se restreint aux “bons” types. Pour cela, posons quelques définitions. Un ensemble  $\mathcal{X}$  est dit *saturé* si

$$u[x := t] \ t_1 \dots t_n \in \mathcal{X} \text{ implique } (\lambda x. u) \ t \ t_1 \dots t_n \in \mathcal{X}$$

Pour  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \Lambda$ , on définit

$$\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} := \{ u \in \Lambda \mid (u \ v) \in \mathcal{Y} \text{ pour tout } v \in \mathcal{X} \}$$

Finalement, étant donnée une interprétation  $\mathcal{I}$  qui à tout type de base  $\alpha$  associe un ensemble saturé  $|\alpha|_{\mathcal{I}}$ , on l'étend aux types comme suit :

$$|\Omega|_{\mathcal{I}} = \Lambda \quad |T \cap T'|_{\mathcal{I}} = |T|_{\mathcal{I}} \cap |T'|_{\mathcal{I}} \quad |T \rightarrow T'|_{\mathcal{I}} = |T|_{\mathcal{I}} \rightarrow |T'|_{\mathcal{I}}$$

4. Montrer que  $|T|_{\mathcal{I}}$  est saturé pour tout  $T$ .
5. Montrer que  $x_1 : T_1, \dots, x_n : T_n \vdash u : T$  et  $t_i \in |T_i|_{\mathcal{I}}$  pour tout  $i$  impliquent  $u[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n] \in |T|_{\mathcal{I}}$ .

On dit que  $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$  est une *paire adéquate* si  $\mathcal{N}$  est saturé,  $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}$ ,  $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_0$  et  $\mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$ .

On dit que  $\Omega$  apparaît positivement (resp. négativement) dans un type  $T$  s'il apparaît à gauche d'un nombre pair (resp. impair) d'implications. Par exemple,  $\Omega$  apparaît uniquement positivement dans  $\Omega$  et  $(\Omega \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$  et il apparaît uniquement négativement dans  $\alpha \rightarrow (\Omega \cap \beta) \rightarrow \gamma$ .

6. Soit  $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$  une paire adéquate et  $\mathcal{I}$  une interprétation telle que pour tout  $\alpha$  on a  $\mathcal{N}_0 \subseteq |\alpha|_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{N}$ . Montrer alors que pour tout  $T$  sans occurrence positive (resp. négative) de  $\Omega$  on a  $|T|_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{N}$  (resp.  $\mathcal{N}_0 \subseteq |T|_{\mathcal{I}}$ ).
7. Montrer qu'on a une paire adéquate si l'on prend  $\mathcal{N}$  l'ensemble des termes qui normalisent selon la stratégie externe gauche (réduction de tête) et  $\mathcal{N}_0$  l'ensemble des termes  $(x \ t_1 \dots t_n)$  avec  $x$  une variable et chaque  $t_i \in \mathcal{N}$ .
8. Soit  $\cdot \vdash u : T$  avec  $T$  sans occurrence positive de  $\Omega$ . Montrer que  $u$  normalise faiblement.