

λ-Calcul et Logique Informatique

David Baelde
baelde@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 1 — Système \mathcal{D} (types intersection)

On considère le système de types suivant :

$$\frac{}{\Gamma, x : T \vdash x : T} \quad \frac{\Gamma, x : T \vdash M : T'}{\Gamma \vdash \lambda x. M : T \rightarrow T'} \quad \frac{\Gamma \vdash M : T \rightarrow T' \quad \Gamma \vdash N : T}{\Gamma \vdash M N : T'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : T_1 \quad \Gamma \vdash M : T_2}{\Gamma \vdash M : T_1 \cap T_2} \quad \frac{\Gamma \vdash M : T_1 \cap T_2}{\Gamma \vdash M : T_i}$$

1. Pour chacun des termes suivants, donner un type que ce terme admet dans le système \mathcal{D} : $\lambda x. x x$, $\lambda x \lambda y. x (y x)$, $(\lambda x. x x) (\lambda y. y)$.
2. Quelle est la différence avec les règles de la conjonction/paire ? Quel sens ce système peut-il avoir dans le contexte du typage des langages de programmations ?
3. Parmi les types suivants, donner un terme pour ceux qui sont habités (on ne tentera pas de prouver qu'un type n'est pas habité) :
 - $((\alpha \cap \beta) \rightarrow \tau) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \tau$
 - $(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \tau) \rightarrow (\alpha \cap \beta) \rightarrow \tau$
 - $((\tau \rightarrow \alpha) \cap (\tau \rightarrow \beta)) \rightarrow \tau \rightarrow (\alpha \cap \beta)$
 - $(\tau \rightarrow (\alpha \cap \beta)) \rightarrow ((\tau \rightarrow \alpha) \cap (\tau \rightarrow \beta))$
4. Proposer une définition pour $\text{Red}_{T \cap T'}$ et montrer que tout terme typable dans le système \mathcal{D} est fortement normalisant.
5. Montrer que pour tout terme u en forme normale il existe Γ et T tels que $\Gamma \vdash u : T$. Indice : on a vu une façon pratique d'écrire une forme normale.
6. Montrer que tout terme fortement normalisant est typable dans \mathcal{D} .

Exercice 2 — Système \mathcal{D}_ω

On étend le système \mathcal{D} en ajoutant un type atomique spécial noté Ω , et la règle de typage suivante :

$$\overline{\Gamma \vdash M : \Omega}$$

1. Donner un terme typable dans \mathcal{D}_ω mais pas dans \mathcal{D} . En termes calculatoires, quelle propriété de typage a-t-on perdu ? nous reste-t-il quelque chose d'intéressant ?
2. Montrer que $u \rightarrow u'$ et $\Gamma \vdash u' : T$ implique $\Gamma \vdash u : T$.
3. Montrer que tout terme faiblement normalisant est typable dans \mathcal{D}_ω par un type sans Ω .

On va voir que la réciproque est vraie si on se restreint aux “bons” types. Pour cela, posons quelques définitions. Un ensemble \mathcal{X} est dit *saturé* si

$$u[x := t] t_1 \dots t_n \in \mathcal{X} \text{ implique } (\lambda x. u) t t_1 \dots t_n \in \mathcal{X}$$

Pour $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \Lambda$, on définit

$$\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} := \{ u \in \Lambda \mid (u v) \in \mathcal{Y} \text{ pour tout } v \in \mathcal{X} \}$$

Finalement, étant donnée une interprétation \mathcal{I} qui à tout type de base α associe un ensemble saturé $|\alpha|_{\mathcal{I}}$, on l'étend aux types comme suit :

$$|\Omega|_{\mathcal{I}} = \Lambda \quad |T \cap T'|_{\mathcal{I}} = |T|_{\mathcal{I}} \cap |T'|_{\mathcal{I}} \quad |T \rightarrow T'|_{\mathcal{I}} = |T|_{\mathcal{I}} \rightarrow |T'|_{\mathcal{I}}$$

4. Montrer que $|T|_{\mathcal{I}}$ est saturé pour tout T .
5. Montrer que $x_1 : T_1, \dots, x_n : T_n \vdash u : T$ et $t_i \in |T_i|_{\mathcal{I}}$ pour tout i impliquent $u[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n] \in |T|_{\mathcal{I}}$.

On dit que $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$ est une *paire adéquate* si \mathcal{N} est saturé, $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}$, $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_0$ et $\mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$.

On dit que Ω apparaît positivement (resp. négativement) dans un type T s'il apparaît à gauche d'un nombre pair (resp. impair) d'implications. Par exemple, Ω apparaît uniquement positivement dans Ω et $(\Omega \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ et il apparaît uniquement négativement dans $\alpha \rightarrow (\Omega \cap \beta) \rightarrow \gamma$.

6. Soit $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N})$ une paire adéquate et \mathcal{I} une interprétation telle que pour tout α on a $\mathcal{N}_0 \subseteq |\alpha|_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{N}$. Montrer alors que pour tout T sans occurrence positive (resp. négative) de Ω on a $|T|_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{N}_0 \subseteq |T|_{\mathcal{I}}$).
7. Montrer qu'on a une paire adéquate si l'on prend \mathcal{N} l'ensemble des termes qui normalisent selon la stratégie externe gauche (réduction de tête) et \mathcal{N}_0 l'ensemble des termes $(x t_1 \dots t_n)$ avec x une variable et chaque $t_i \in \mathcal{N}$.
8. Soit $\cdot \vdash u : T$ avec T sans occurrence positive de Ω . Montrer que u normalise faiblement.