TD7 5 novembre 2012

Logique & Calculabilité

Hubert Comon $\wedge$ David Baelde
{comon,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 0 (Questions de cours)

1. Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{p(1)\}$. Donner un modèle de Herbrand pour $\forall x.\ p(x) \leftrightarrow \neg p(s(x))$.
2. Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{=(2)\}$. Skolémiser $\forall x \exists y.\ x = s(y)$. Donner un modèle de Herbrand de la formule résultante.
3. Combien y a-t-il de structures de Herbrand pour (1) $\mathcal{F} = \{a(0), b(0)\}$, $\mathcal{P} = \{p(1)\}$, (2) $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$, $\mathcal{P} = \{=(2)\}$ et (3) $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$, $\mathcal{P} = \{p(0)\}$?
4. Donner $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ et une formule satisfiable ϕ qui n'admette pas de modèle de Herbrand.
5. On compare deux modèles de Herbrand sur les mêmes signatures $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ en posant $\mathcal{M} \leq \mathcal{M}'$ ssi pour tout P, $P_{\mathcal{M}} \subseteq P_{\mathcal{M}'}$. Donner une formule satisfiable qui n'admette pas de plus petit modèle de Herbrand.

Exercice 1 (Théorème de Löwenheim-Skolem descendant)
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ dénombrables. Montrer que si une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-théorie admet un modèle alors elle admet un modèle (de domaine) dénombrable.

Exercice 2 (Théorème de compacité)
Montrer la compacité de la logique du premier ordre, en s'appuyant sur les théorèmes du cours.

Exercice 3 (Théorème de Löwenheim-Skolem ascendant)

1. Montrer que si E admet un modèle $\mathcal{M}$ de domaine A non vide elle admet aussi un modèle dont le domaine a un élément de plus, *i.e.*, $A \uplus \{\mathbf{1}\}$. Montrer que cela n'est plus vrai quand on se restreint à des modèles où le prédicat d'égalité est interprété comme l'égalité sur le domaine.

2. En déduire le théorème de Löwenheim-Skolem ascendant pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ dénombrables : si un théorie E admet un modèle de cardinalité $\alpha \geq \aleph_0$, alors pour tout $\beta \geq \alpha$ la théorie E admet un modèle de cardinalité (au moins) β.
3. **Bonus** : montrer qu'on a encore ce théorème pour des modèles dans lesquels le prédicat d'égalité est interprété comme l'égalité sur le domaine du modèle.

Exercice 4 (Logique monadique)
Supposant que $\mathcal{P}$ ne contient que des symboles de prédicats unaires et que $\mathcal{F}$ ne contient que des symboles de fonction unaires, montrer que toute formule satisfaisable admet un modèle fini. (On pourra se limiter au cas où $\mathcal{F}$ est vide.)

Exercice 5 (Examen 2011-2012)
On dit que deux structures sont *élémentairement équivalentes* si elles satisfont les mêmes formules du premier ordre. On pose $\mathcal{P} = \{\geq\}$ et $\mathcal{F} = \emptyset$, et on considère les $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ où $\geq$ est interprété de façon canonique.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas élémentairement équivalents.
2. On va montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont élémentairement équivalents. Si σ est une substitution à valeurs dans $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$) on note $\geq_\sigma$ la relation d'ordre définie par $x \geq_\sigma y$ ssi $x\sigma \geq_{\mathcal{S}} y\sigma$.
   (a) Montrer que $\mathcal{S}, \sigma \vDash \phi$ ssi pour toute affectation θ telle que $\geq_\theta$ est identique à $\geq_\sigma$, on a $\mathcal{S}, \theta \vDash \phi$.
   (b) Conclure.