TD1 17 septembre 2012

Logique & Calculabilité

Hubert Comon $\wedge$ David Baelde
{comon,baelde}@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 3
Donner l'ensemble des modèles de $((P \to Q) \vee (\neg P \to \neg Q)) \wedge (Q \wedge R \to \neg P)$ pour $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$.

Exercice 6

1. Supposons $\mathcal{P}$ fini. Montrer que pour tout ensemble d'interprétations S il existe un ensemble fini de formules E tel que S est exactement l'ensemble des modèles de E.
2. Montrer que cela n'est plus vrai quand $\mathcal{P}$ est infini.

Exercice 7
Donner un ensemble de formules dont l'ensemble des modèles est infini mais dénombrable.

Exercice 8 (théorème d'interpolation)
Soient ϕ et ψ telles que $\phi \models \psi$. Montrer qu'il existe une formule θ telle que $\phi \models \theta$ et $\theta \models \psi$ et les variables propositionnelles apparaissant dans θ apparaissent aussi dans ϕ et ψ.

Exercice 15
Un ensemble de formules E est *indépendant* si, pour toute formule $\phi \in E$, $E \setminus \{\phi\} \not\models \phi$.

1. Montrer que, pour tout ensemble fini de formules E, il existe un sous-ensemble $E' \subseteq E$ tel que, pour tout $\phi \in E$, $E' \models \phi$.
2. Montrer que, pour tout ensemble dénombrable E de formules, il existe un ensemble indépendant E' tel quel pour tout $\phi \in E'$, $E \models \phi$ et pour tout $\psi \in E$, $E' \models \psi$.

3. Montrer qu'il n'est pas toujours possible d'avoir en plus $E' \subseteq E$.

Exercice 17
Montrer qu'un graphe est coloriable avec k couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes finis est coloriable avec k couleurs.

Exercice 11
Montrer que $\vee$, $\wedge$, $\neg$ sont définissables à l'aide du seul connecteur $\to$ et de la constante $\perp$. On dit alors que l'ensemble $\{\to, \perp\}$ est *fonctionnellement complet*.

Exercice 13
Donner un connecteur binaire qui est, seul, fonctionnellement complet.

Exercice 14
Montrer que $\{\leftrightarrow, \neg\}$ n'est pas fonctionnellement complet.