Logique

Résumé des épisodes précédents

La logique des prédicats

La notion de théorie

La notion de modèle

Comment démontrer qu'une proposition n'est pas démontrable ?

Est-il possible de démontrer qu'une proposition n'est pas démontrable ?

Comment préjuger de la créativité des personnes qui nous succéderont ?

Pourtant, de nombreux résultats négatifs en mathématiques : irrationalité de $\sqrt{2}$, quadrature du cercle, résolution par radicaux des équations du cinquième degré

Un exemple de résultat négatif

On part de

$$4, 6, 24, 42, 74$$

On peut ajouter ou multiplier deux nombres déjà construits

Peut-on atteindre 242 ?

Un exemple de résultat négatif

On part de

$$4, 6, 24, 42, 74$$

On peut ajouter ou multiplier deux nombres déjà construits

Peut-on atteindre 242 ?

$$\dfrac{\dfrac{\overline{24} \qquad \overline{74}}{98}\,+ \qquad \dfrac{\overline{6} \qquad \overline{24}}{144}\,\times}{242}\,+$$

Un exemple de résultat négatif

On part de

$$4, 6, 24, 42, 74$$

On peut ajouter ou multiplier deux nombres déjà construits

Peut-on atteindre 242 ?

$$\cfrac{\cfrac{\overline{24} \qquad \overline{74}}{98}\,+ \qquad \cfrac{\overline{6} \qquad \overline{24}}{144}\,\times}{242}\,+$$

Une autre solution

$$242 = \underbrace{4 + \ldots + 4}_{59} + 6$$

Un exemple de résultat négatif

On part de

$$4, 6, 24, 42, 74$$

On peut ajouter ou multiplier deux nombres déjà construits

Peut-on atteindre 242 ?

$$\dfrac{\dfrac{\overline{24} \qquad \overline{74}}{98}\,+ \qquad \dfrac{\overline{6} \qquad \overline{24}}{144}\,\times}{242}\,+$$

Une autre solution

$$242 = \underbrace{4 + \ldots + 4}_{59} + 6$$

Peut-on atteindre 243 ?

Un exemple de résultat négatif

On part de

$$4, 6, 24, 42, 74$$

On peut ajouter ou multiplier deux nombres déjà construits

Peut-on atteindre 242 ?

$$\dfrac{\dfrac{\overline{24} \qquad \overline{74}}{98}\;+ \qquad \dfrac{\overline{6} \qquad \overline{24}}{144}\;\times}{242}\;+$$

Une autre solution

$$242 = \underbrace{4 + \ldots + 4}_{59} + 6$$

Peut-on atteindre 243 ?

Non car tous les nombres atteignables sont pairs

La parité est un invariant de l'addition et de la multiplication non vérifié par 243

I. La notion de modèle

Un langage $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
Un modèle de ce langage est formé de

- pour chaque s, un ensemble non vide $\mathcal{M}_s$
- un ensemble non vide $\mathcal{B}$, un sous-ensemble $\mathcal{B}^+$
- pour chaque f d'arité $\langle s_1, ..., s_n, s' \rangle$, une fonction $\hat{f}$ de $\mathcal{M}_{s_1} \times ... \times \mathcal{M}_{s_n}$ dans $\mathcal{M}_{s'}$
- pour chaque P d'arité $\langle s_1, ..., s_n \rangle$, une fonction $\hat{P}$ de $\mathcal{M}_{s_1} \times ... \times \mathcal{M}_{s_n}$ dans $\mathcal{B}$
- $\hat{\top}$, $\hat{\bot}$, $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$, $\hat{\Rightarrow}$, $\hat{\forall}$, $\hat{\exists}$

Un langage et un modèle de ce langage

Une fonction $[\![\ ]\!]$ qui associe

- à chaque terme t de sorte s, un élément $[\![t]\!]$ de $\mathcal{M}_s$
- à chaque proposition A, un élément $[\![A]\!]$ de $\mathcal{B}$

Morphisme :
$[\![f(t_1, ..., t_n)]\!] = \hat{f}([\![t_1]\!], ..., [\![t_n]\!])$
$[\![P(t_1, ..., t_n)]\!] = \hat{P}([\![t_1]\!], ..., [\![t_n]\!])$
$[\![A \wedge B]\!] = \hat{\wedge}([\![A]\!], [\![B]\!])$...

Combien de fonctions possibles ?

Une seule si nous nous limitons aux termes et propositions sans variables
$[\![S(0)]\!] = \hat{S}(\hat{0})$

Mais plusieurs si on a des variables
La fonction $[\![\ ]\!]$ complètement définie par sa valeur sur les variables
(idem morphisme d'espaces vectoriels défini par son image sur une base)

Valuation : fonction de domaine fini qui associe aux variables $x_1, ..., x_n$ de sortes $s_1, ..., s_n$ des éléments $a_1, ..., a_n$ de $\mathcal{M}_{s_1}$, ..., $\mathcal{M}_{s_n}$
$\phi = (x_1 = a_1, ..., x_n = a_n)$

$[\![\ ]\!]_\phi$
$[\![x]\!]_\phi = \phi(x)$, $[\![f(t_1, ..., t_n)]\!]_\phi = \hat{f}([\![t_1]\!]_\phi, ..., [\![t_n]\!]_\phi)$...
Tous les termes et les propositions dont les variables libres sont dans le domaine de ϕ

$[\![\forall x\ A]\!]_\phi$?

$[\![\forall x\ A]\!]_\phi = \hat{\forall}([\![A]\!]_\phi)$

$VL(A) \subseteq VL(\forall x\ A) \cup \{x\}$
On considère l'ensemble de toutes les valeurs $[\![A]\!]_{\phi, x=a}$
Et c'est à cet ensemble qu'on applique $\hat{\forall}$ ou $\hat{\exists}$
Fonctions de $\mathcal{P}^+(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{B}$

Pour une proposition A sans variables $[\![A]\!]_\phi$ indépendant de ϕ
La notion de valuation inutile

Pour une proposition A close également
Mais la notion de valuation nécessaire pour les sous-expressions

À quoi sert $\mathcal{B}^+$?

Un langage $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
Un modèle de ce langage est formé de

- pour chaque s, un ensemble non vide $\mathcal{M}_s$
- un ensemble non vide $\mathcal{B}$, un sous-ensemble $\mathcal{B}^+$
- pour chaque f d'arité $\langle s_1, ..., s_n, s' \rangle$, une fonction $\hat{f}$ de $\mathcal{M}_{s_1} \times ... \times \mathcal{M}_{s_n}$ dans $\mathcal{M}_{s'}$
- pour chaque P d'arité $\langle s_1, ..., s_n \rangle$, une fonction $\hat{P}$ de $\mathcal{M}_{s_1} \times ... \times \mathcal{M}_{s_n}$ dans $\mathcal{B}$
- $\hat{\top}$, $\hat{\bot}$, $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$ $\hat{\vee}$, $\hat{\Rightarrow}$, $\hat{\forall}$, $\hat{\exists}$

À quoi sert $\mathcal{B}^+$?

Une proposition close A est valide dans un modèle si $[\![A]\!] \in \mathcal{B}^+$

Plus généralement, une proposition A est valide si pour toute valuation ϕ, $[\![A]\!]_\phi \in \mathcal{B}^+$

Un séquent $A_1, ..., A_n \vdash B$ est valide si la proposition $(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \Rightarrow B$ est valide

Un cas particulier : les modèles bivalués

$\mathcal{B} = \{0, 1\}$
$\mathcal{B}^+ = \{1\}$

$\hat{\top} = 1$, $\hat{\bot} = 0$

	0	1
$\hat{\neg}$	1	0

$\hat{\wedge}$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\hat{\vee}$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\hat{\Rightarrow}$	0	1
0	1	0
1	1	1

	$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{1\}$
$\hat{\forall}$	0	0	1

	$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{1\}$
$\hat{\exists}$	0	1	1

Désormais : tous les modèles sont bivalués

Un exemple

Langage : une seule sorte, une constante c, deux prédicats unaires P et Q

$\mathcal{M} = \{\pi, e\}$
$\hat{c} = \pi$,
$\hat{P}$ est la fonction qui associe 0 à π et 1 à e
$\hat{Q}$ est la fonction qui associe 1 à π et 1 à e

Est-ce que $P(c)$ est valide ? $Q(c)$? $P(c) \vee Q(c)$? $\forall x\ P(x)$? $\exists x\ P(x)$? $\forall x\ Q(x)$? $\exists x\ Q(x)$?

Un autre exemple

Langage : une sorte, symbole de fonction binaire $+$, symbole de prédicat binaire $=$

$(\mathbb{N}$, addition sur $\mathbb{N}$, égalité sur $\mathbb{N})$ $\forall x \forall y \exists z\ (x + z = y)$ est-elle valide ?
Même question pour $\mathbb{Z}$ muni de l'addition et de l'égalité sur $\mathbb{Z}$?

La proposition $\forall x \forall y\ (x + y = y + x)$ est-elle valide dans ces modèles ? Un modèle dans lequel elle n'est pas valide ?

Quel rapport avec la question du jour

« comment démontrer qu'une proposition n'est pas démontrable ? » ?

II. Le théorème de correction

Le théorème de correction

Si un séquent est démontrable, alors il est valide dans tous les modèles

La validité dans tous les modèles est un invariant des règles de déduction

Le théorème de correction

Simple récurrence sur la structure d'une démonstration

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash A} \quad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge\text{-intro}$$

Hypothèse de récurrence : $\Gamma \vdash A$ et $\Gamma \vdash B$ valides dans tous les modèles
$\Gamma = \{G_1, ..., G_n\}$ et $G = G_1 \wedge ... \wedge G_n$
$G \Rightarrow A$ et $G \Rightarrow B$ valides dans tous les modèles donc $G \Rightarrow (A \wedge B)$ est valide dans tous les modèles
Idem pour les autres règles

Un corollaire

Soit

- $\mathcal{T}$ une théorie
- $\mathcal{M}$ un modèle dans lequel tous les axiomes de $\mathcal{T}$ (propositions closes) sont valides
- A une proposition

Si A est démontrable dans $\mathcal{T}$, alors A est valide dans $\mathcal{M}$

Il existe un sous-ensemble fini Γ de $\mathcal{T}$ tel que $\Gamma \vdash A$ démontrable
$\Gamma \vdash A$ valide dans $\mathcal{M}$ donc A valide dans $\mathcal{M}$

On contraposé

Soit

- $\mathcal{T}$ une théorie
- $\mathcal{M}$ un modèle dans lequel tous les axiomes de $\mathcal{T}$ sont valides
- A une proposition

Si A n'est pas valide dans $\mathcal{M}$ alors A est n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}$

Une méthode pour montrer que A n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}$

Trouver un modèle $\mathcal{M}$ dans lequel

tous les axiomes de $\mathcal{T}$ sont valides
A n'est pas valide

Un exemple

Soit la théorie $\mathcal{T}$ formée de l'axiome $P(c) \vee Q(c)$

Montrer que $P(c)$ n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}$
Montrer que $Q(c)$ n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}$

Les trois formes du théorème de correction

1. Si A démontrable dans $\mathcal{T}$, alors A valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$

2. S'il existe un modèle de $\mathcal{T}$ qui n'est pas un modèle de A, alors A non démontrable dans $\mathcal{T}$

3. Si $\mathcal{T}$ a un modèle, alors $\mathcal{T}$ est cohérente

III. Le théorème de complétude de Gödel

Les trois formes du théorème de complétude

1. Si A valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$, alors A démontrable dans $\mathcal{T}$

2. Si A non démontrable dans $\mathcal{T}$, alors il existe un modèle de $\mathcal{T}$ qui n'est pas un modèle de A

3. Si $\mathcal{T}$ est cohérente, alors $\mathcal{T}$ a un modèle

1. Si A valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$, alors A démontrable dans $\mathcal{T}$
2. Si A non démontrable dans $\mathcal{T}$, alors il existe un modèle de $\mathcal{T}$ qui n'est pas un modèle de A
3. Si $\mathcal{T}$ est cohérente, alors $\mathcal{T}$ a un modèle

1. et *2.* équivalentes : trivial
2. implique *3.* : trivial
3. implique *2.*

1. Si A valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$, alors A démontrable dans $\mathcal{T}$

2. Si A non démontrable dans $\mathcal{T}$, alors il existe un modèle de $\mathcal{T}$ qui n'est pas un modèle de A

3. Si $\mathcal{T}$ est cohérente, alors $\mathcal{T}$ a un modèle

1. et *2.* équivalentes : trivial

2. implique *3.* : trivial

3. implique *2.* :

A non démontrable dans $\mathcal{T}$

$\mathcal{T}, \neg A$ cohérente

$\mathcal{T}, \neg A$ a un modèle $\mathcal{M}$

$\mathcal{M}$ modèle de $\mathcal{T}$ mais pas de A

La démonstration du théorème de complétude

$\boxed{\textit{3.}\ \text{Si } \mathcal{T} \text{ est cohérente, alors } \mathcal{T} \text{ a un modèle}}$

Un langage $\mathcal{L}$, une théorie cohérente $\mathcal{T}$
Nous voulons construire un modèle de $\mathcal{T}$

Que choisir comme éléments de $\mathcal{M}_s$?
Pas grand chose : $\mathcal{L}$, ses sortes, ses symboles, ses termes et ses propositions, $\mathcal{T}$, ses axiomes...

Une première tentative

$\mathcal{M}_s$ ensemble des termes clos de sorte s du langage

$\hat{f}$ fonction associant $f(t_1, ..., t_n)$ à $t_1, ..., t_n$
(si t clos $[\![t]\!] = t$)

$\hat{P}$ la fonction associant 1 ou 0 à $t_1, ..., t_n$, selon que $P(t_1, ..., t_n)$ démontrable ou non

Trop naïf

Un seul axiome $P(c) \vee Q(c)$
Les propositions $P(c)$, $\neg P(c)$, $Q(c)$, $\neg Q(c)$ non démontrables
$\mathcal{M} = \{c\}$, $\hat{P}(c) = 0$, $\hat{Q}(c) = 0$
donc $P(c) \vee Q(c)$ non valide dans $\mathcal{M}$

Ni $P(c)$ ni $\neg P(c)$ n'est démontrable pas de raison de choisir 0 plutôt que 1 pour $\hat{P}(c)$

Il faut que $P(c)$ ou $\neg P(c)$

Si nous ajoutons l'axiome $P(c)$, alors $\hat{P}(c) = 1$
Si nous ajoutons l'axiome $\neg P(c)$, alors, comme $P(c) \vee Q(c)$ axiome, $Q(c)$ démontrable et $\hat{Q}(c) = 1$

Ajouter des axiomes... et des constantes

Une constante c
Deux axiomes $\neg P(c)$ et $\exists x\ P(x)$

$\mathcal{M} = \{c\}$
$\hat{P}(c) = 0$
$\exists x\ P(x)$ n'est pas valide dans ce modèle

Ajouter une constante d et un axiome $P(d)$ pour avoir $\mathcal{M} = \{c, d\}$
La constante d : témoin (de Henkin) de l'existence d'un objet vérifiant P

La complétion d'une théorie

Langage $\mathcal{L}$, théorie $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{L}$, cohérente
Il existe $\mathcal{L}'$ ($\supseteq \mathcal{L}$) et $\mathcal{U}$ ($\supseteq \mathcal{T}$) dans $\mathcal{L}'$ tels que

1. $\mathcal{U}$ est cohérente
2. A (close) ou $\neg A$ est démontrable (et même axiome) dans $\mathcal{U}$
3. Si $\exists x\ A$ démontrable dans $\mathcal{U}$ alors il existe c tel que $(c/x)A$ démontrable dans $\mathcal{U}$

Examiner les propositions closes l'une après l'autre

1. Si A est démontrable, nous la prenons comme axiome
2. Si $\neg A$ est démontrable, nous la prenons comme axiome
3. Si ni A ni $\neg A$ n'est démontrable, nous choisissons A comme axiome

Si $\exists x\ C$ nous ajoutons un axiome $(c/x)C$ où c nouvelle constante

$\mathcal{H} = \{c_i^s\}$ infinité de constantes c_0^s, c_1^s, c_2^s... de chaque sorte
$\mathcal{L}' = (\mathcal{S}, \mathcal{F} \uplus \mathcal{H}, \mathcal{P})$
Propositions closes de $\mathcal{L}'$ dénombrables : énumération A_0, A_1, A_2...
Famille de théories $\mathcal{U}_n$
$\mathcal{U}_0 = \mathcal{T}$

1. Si A_n démontrable dans $\mathcal{U}_n$: $B = A_n$
2. si $\neg A_n$ démontrable dans $\mathcal{U}_n$: $B = \neg A_n$
3. si ni A_n ni $\neg A_n$ démontrable dans $\mathcal{U}_n$: $B = A_n$

Si B pas de la forme $\exists x\ C$, alors $\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n \cup \{B\}$
si $B = \exists x\ C$, alors $\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n \cup \{B, (c_i^s/x)C\}$ (c_i^s première constante pas dans $\mathcal{U}_n$)

$$\mathcal{U} = \bigcup_n \mathcal{U}_n$$

1. $\mathcal{U}$ est cohérente
2. A ou $\neg A$ est démontrable (et même axiome) dans $\mathcal{U}$
3. Si $\exists x\ A$ démontrable dans $\mathcal{U}$ alors il existe c tel que $(c/x)A$ démontrable dans $\mathcal{U}$

Les propriétés de la théorie $\mathcal{U}$

$\neg A$ démontrable ssi A non démontrable
$A \wedge B$ démontrable ssi A démontrable et B démontrable
$A \vee B$ ssi A démontrable ou B est démontrable
$A \Rightarrow B$ démontrable ssi si A est démontrable alors B démontrable
$\forall x\ A$ démontrable ssi pour tout terme clos t, $(t/x)A$ démontrable
$\exists x\ A$ est démontrable ssi il existe un terme clos t, $(t/x)A$ démontrable

Le cas du $\vee$: si $A \vee B$ démontrable, alors
A démontrable ou $\neg A$ démontrable
si $\neg A$ démontrable, alors B démontrable

Le théorème de complétude (ouf)

$\mathcal{M}_s$ ensemble des termes clos de sorte s de $\mathcal{L}'$
$\hat{f}$ fonction associant $f(t_1, ..., t_n)$ à $t_1, ..., t_n$
$\hat{P}$ la fonction associant 1 ou 0 à $t_1, ..., t_n$, selon que $P(t_1, ..., t_n)$ démontrable dans $\mathcal{U}$ ou non

A valide dans $\mathcal{M}$ ssi A démontrable dans $\mathcal{U}$ (récurrence)
$\mathcal{M}$ modèle de $\mathcal{U}$ donc de $\mathcal{T}$

Cette démonstration ne marche que si $\mathcal{L}$ est un langage fini ou dénombrable (énumération)

Extension aux langages non dénombrables (énumération transfinie)

Correction + complétude

A démontrable dans $\mathcal{T}$
ssi
A est valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$

Un résultat miraculeux : fini / infini

IV. Des applications du théorème de complétude

La cohérence relative

ZF : la théorie des ensembles de Zermelo + l'axiome de remplacement (de Fraenkel)

On ajoute des axiomes à ZF (sans en retirer) : axiome du choix, hypothèse du continu...

« ZF^+ cohérente » non démontrable dans ZF
(et donc dans les mathématiques ordinaires)

Conséquence du second théorème d'incomplétude de Gödel : une théorie cohérente ne démontre jamais sa propre cohérence (ni *a fortiori* celle d'une extension)

La cohérence relative

On cherche alors à démontrer

« si ZF cohérente alors ZF^+ cohérente »

On pose un modèle de ZF et on construit un modèle de ZF^+

Complétude (cohérence donc modèle), puis correction (modèle donc cohérence)

La conservativité

Un langage $\mathcal{L}$, une théorie $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{L}$
On étend la théorie en ajoutant des concepts : nouvelles sortes, nouveaux symboles $\mathcal{L}'(\supseteq \mathcal{L})$ et nouveaux axiomes $\mathcal{T}'(\supseteq \mathcal{T})$

Nous pouvons démontrer plus de choses
Nous ne voulons pas démontrer plus de choses sur les anciens concepts
Nous ne voulons pas démontrer plus de propositions exprimables dans $\mathcal{L}$
Extension conservatrice

Exercice

Une constante c
Un symbole de prédicat P
Aucun axiome
On ajoute une constante d et un axiome $P(d)$
On peut démontrer de nouvelles choses : $P(d)$

Extension conservatrice ?

Mais...

Une constante c
Un symbole de prédicat P
Un axiome $P(c)$
On ajoute une constante d et un axiome $P(d)$
On peut démontrer de nouvelles choses : $P(d)$

Extension conservatrice ?

Extension d'un modèle

Soit $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{L}$
Soit $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$

$\mathcal{M}'$ modèle de $\mathcal{L}'$ est une extension de $\mathcal{M}$
Même domaines pour les sortes de $\mathcal{L}$, mêmes $\hat{f}$, $\hat{P}$ pour les symboles de $\mathcal{L}$
(+ nouveaux domaines pour les nouvelles sortes, nouveaux $\hat{f}$, $\hat{P}$ pour les nouveaux symboles)

Trivial : pour tout A dans $\mathcal{L}$, $[\![A]\!]^{\mathcal{M}}_{\phi} = [\![A]\!]^{\mathcal{M}'}_{\phi}$

Le théorème

$\mathcal{T}'$ extension conservatrice de $\mathcal{T}$
si tout modèle de $\mathcal{T}$ s'étend en un modèle de $\mathcal{T}'$

On montre A démontrable dans $\mathcal{T}' \Rightarrow A$ valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}' \Rightarrow A$ valide dans tous les modèles de $\mathcal{T} \Rightarrow A$ démontrable dans $\mathcal{T}$

Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{T}$, $\mathcal{M}$ s'étend en $\mathcal{M}'$, A valide dans $\mathcal{M}'$, donc dans $\mathcal{M}$

Exercice

Un axiome $P(c)$
On ajoute une constante d et un axiome $P(d)$
Extension conservatrice ?

Soit un modèle $\mathcal{M}$, $\hat{P}$, $\hat{c}$
$\hat{d}$?

Exercice : la skolémisation

Un axiome $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$
Un axiome $\forall x\ \forall z\ (z \in \mathcal{P}(x) \Leftrightarrow z \subseteq x)$

Extension conservatrice ?

V. Des applications en algèbre

Lowenheim-Skolem

Généralisation du théorème de complétude de Gödel
Si $\mathcal{L}$ langage fini ou dénombrable

Remarque : si $\mathcal{T}$ a un modèle, alors $\mathcal{T}$ a un modèle fini ou dénombrable

Lowenheim-Skolem

Si $\mathcal{T}$ a un modèle infini, alors $\mathcal{T}$ a un modèle de toute cardinalité infinie
Soit κ un ensemble (par exemple $\mathbb{R}$), on montre qu'il existe un modèle de même cardinal que κ
Pour chaque élément c de κ on ajoute une constante à $\mathcal{L}$: $\mathcal{L} \uplus \kappa$ et on ajoute des axiomes $c \neq c'$
Théorie cohérente (car $\mathcal{T}$ a un modèle infini)
Modèle de même cardinal que κ (complétude en cardinalité quelconque)

Des modèles non dénombrables de l'arithmétique ?, des modèles dénombrables de l'analyse ?

Les groupes

$$\forall x \forall y \forall z\ ((x + y) + z) = (x + (y + z))$$

$$\forall x\ (x + 0 = x)$$

$$\forall x\ (0 + x = x)$$

$$\forall x\ (I(x) + x = 0)$$

$$\forall x\ (x + I(x) = 0)$$

Peu intéressante en tant que théorie déductive

Mais ses modèles sont intéressants pour eux-mêmes

Des groupes de toutes cardinalités

Lowenheim-Skolem : il existe des groupes de toutes les cardinalités infinies

Tout ensemble infini peut-être muni d'une structure de groupe

La prochaine fois

Les théorèmes d'indécidabilité et d'incomplétude