Logique

Résumé des épisodes précédents

La logique des prédicats :

- les langages de la logique des prédicats
- les règles de déduction naturelle
- la notion de démonstration

La notion de théorie

Définir la notion de théorie

Propriétés d'une théorie

Des exemples de théories :

- La théorie de l'égalité
- L'arithmétique
- La théorie des ensembles

I. Un exercice : la logique martienne

Quelle hypothèse si les Martiens, avaient la règle de déduction naturelle

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

au lieu d'avoir la règle

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

?

Quelle hypothèse si les Martiens, avaient la règle de déduction naturelle

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

au lieu d'avoir la règle

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

?

Que, en martien, la disjonction, et non la conjonction, s'écrit $\wedge$

Quelle est la réponse à la question : « Quelle est la signification du symbole $\wedge$? » ?

C'est la règle de déduction

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

(et les autres règles de déduction)

Comment sait-on que l'on peut déduire $A \wedge B$ de A et B ?

La règle

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

fait partie de la définition de la signification de $\wedge$

II. La notion de théorie

Pourquoi des théories ?

Un langage : 0 : constante, $=$ symbole de prédicat binaire
Déduction naturelle
Impossible démontrer

$$0 = 0$$

On ne sait pas ce que signifie le symbole $=$
Peut-être signifie-t-il « inférieur au sens strict » ou « différent »

Une fusée à deux étages

La logique (règles de déduction) définit la signification des symboles $\top$, $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$

La théorie (axiomes...) définit la signification des symboles 0, $=$, $\leq$, $\in$, point, droite...

Comment utiliser un axiome dans une démonstration ?

Ou bien
on ajoute une règle

$$\frac{}{\Gamma \vdash A}\, A \in \mathcal{T}$$

Ou bien
démonstration de $\Gamma \vdash B$ dans $\mathcal{T}$: démonstration de $\mathcal{T}, \Gamma \vdash B$
Règle axiome de la déduction naturelle

Théories infinies : chaque démonstration n'utilise qu'un nombre fini d'axiomes
Démonstration de $\Gamma \vdash B$ dans $\mathcal{T}$: démonstration de $\mathcal{T}', \Gamma \vdash B$, pour $\mathcal{T}'$ sous-ensemble fini de $\mathcal{T}$

Un exercice

Démontrer la proposition $0 = 0$ dans la théorie $\forall x \; (x = x)$

Une grande diversité de théories

- Exprimer une partie des mathématiques : géométrie, arithmétique...
- Exprimer « toutes » les mathématiques : théorie des ensembles, théorie des types...
- Exprimer un savoir spécifique (systèmes experts) : théorie des maladies cryptogamiques des tomates...

III. Les propriétés des théories

Contradiction et cohérence

$\mathcal{T}$ contradictoire si (trois définitions équivalentes)

- il existe A telle que A et $\neg A$ démontrables dans $\mathcal{T}$
- $\perp$ démontrable dans $\mathcal{T}$
- toute proposition est démontrable dans $\mathcal{T}$

Exercice : équivalence

$\mathcal{T}$ cohérente sinon (trois définitions possibles)

Complétude et incomplétude

$\mathcal{T}$ complète si pour toute proposition close A, A est démontrable ou $\neg A$ est démontrable
Wir müssen wissen. Wir werden wissen.

Incomplète sinon

Très facile de construire une théorie incomplète
Exercice : langage P, pas d'axiome, P non démontrable, $\neg P$ non démontrable

Décidabilité et indécidabilité

$\mathcal{T}$ décidable si un algorithme qui décide si une proposition est démontrable dans $\mathcal{T}$

Indécidable sinon

Les propositions de $\mathcal{T}$ peuvent se numéroter : $\ulcorner A \urcorner$ numéro de A

IV. La théorie de l'égalité

Deux axiomes

Réflexivité

$$\forall x \ (x = x)$$

Substitutivité (Leibniz)

Si deux êtres sont égaux tout ce qui est vrai de l'un est également vrai de l'autre

$$\forall x \forall y \forall c \ (x = y \Rightarrow x \epsilon c \Rightarrow y \epsilon c)$$

ϵ ?

Une théorie élémentaire des ensembles (la théorie des classes)

Schéma d'axiome de compréhension
Pour chaque A proposition ne contenant pas le symbole ϵ, un axiome

$$\overline{\forall}\ \exists c \forall z\ (z \ \epsilon\ c \Leftrightarrow A)$$

Une infinité d'axiomes. Exemple

$$\exists c \forall z\ (z \in c \Leftrightarrow (5 \leq z \wedge z \leq 28))$$

Deux sortes d'objets : les individus (ι) et les classes (κ)

Une alternative

Éviter la notion de classe

Quitte à utiliser un schéma d'axiome : un schéma pour l'axiome de substitutivité

Réflexivité

$$\forall x\ (x = x)$$

Substitutivité (Leibniz)

$$\overline{\forall}\ \forall x \forall y\ (x = y \Rightarrow (x/z)A \Rightarrow (y/z)A)$$

Exemple

$$\forall x \forall y\ (x = y \Rightarrow (5 \leq x \wedge x \leq 28) \Rightarrow (5 \leq y \wedge y \leq 28))$$

Une troisième (et dernière) formulation

Un nombre fini d'instances suffisantes pour schéma entier

Pour chaque symbole de fonction f et pour chaque indice i

$$\forall w_1 \ldots \forall w_{i-1} \forall w_{i+1} \ldots \forall w_n \forall x \forall y \ (x = y \Rightarrow f(w_1, \ldots, w_{i-1}, x, w_{i+1}, \ldots, w_n) = f(w_1, \ldots, w_{i-1}, y, w_{i+1}, \ldots, w_n))$$

Pour chaque symbole de prédicat P et pour chaque indice i

$$\forall w_1 \ldots \forall w_{i-1} \forall w_{i+1} \ldots \forall w_n \forall x \forall y \ (x = y \Rightarrow P(w_1, \ldots, w_{i-1}, x, w_{i+1}, \ldots, w_n) \Rightarrow P(w_1, \ldots, w_{i-1}, y, w_{i+1}, \ldots, w_n))$$

Exercices

En utilisant les axiomes

$$\forall x\ (x = x)$$

$$\forall w \forall x \forall y\ (x = y \Rightarrow x = w \Rightarrow y = w)$$

$$\forall w \forall x \forall y\ (x = y \Rightarrow w = x \Rightarrow w = y)$$

démontrer

$$\forall x \forall y\ (x = y \Rightarrow y = x)$$

$$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \Rightarrow y = z \Rightarrow x = z)$$

V. L'arithmétique

Les objets mathématiques les plus primitifs

Commençons par les nombres entiers naturels

Et nous verrons pour les rationnels, les réels, les ensembles, les fonctions, les espaces vectoriels... plus tard

Un exercice pour commencer : comment exprimer qu'il y a un nombre infini d'objets ?

Un exercice pour commencer : comment exprimer qu'il y a un nombre infini d'objets ?

f, a

$$\forall x \forall y\ (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

$$\forall x\ \neg(a = f(x))$$

Une manière de construire les entiers : $0 = a$, $1 = f(a)$, $2 = f(f(a))$, $3 = f(f(f(a)))$...

Autant appeler a : 0 et f : S

$$\forall x \forall y \ (S(x) = S(y) \Rightarrow x = y)$$

$$\forall x \ \neg(0 = S(x))$$

Axiomes 3 et 4 de Peano
Égalité

Limiter l'univers aux entiers

Ensemble des entiers : seul à contenir 0 et à être clos par S ?

Limiter l'univers aux entiers

Ensemble des entiers : seul à contenir 0 et à être clos par S ?

Non, mais plus petit (intersection)

$$\forall c\ (0 \epsilon c \Rightarrow \forall x\ (x \epsilon c \Rightarrow S(x) \epsilon c) \Rightarrow \forall y\ y \epsilon c)$$

Axiome 5 de Peano

ϵ ?

À nouveau, deux sortes d'objets (ι, κ)
et le schéma d'axiome de compréhension

Une alternative

Éviter la notion de classe

Quitte à utiliser un schéma d'axiome : un schéma pour l'axiome 5 de Peano

$$\overline{\forall}\ ((0/z)A \Rightarrow \forall x\ ((x/z)A \Rightarrow (S(x)/z)A) \Rightarrow \forall y\ (y/z)A)$$

Par exemple, si A est $z + 0 = z$

$$0 + 0 = 0 \Rightarrow \forall x\ (x + 0 = x \Rightarrow S(x) + 0 = S(x)) \Rightarrow \forall y\ (y + 0 = y)$$

Et on est presque au bout : addition et multiplication

$$\forall y\ (0 + y = y)$$

$$\forall x\ \forall y\ (S(x) + y = S(x + y))$$

$$\forall y\ (0 \times y = 0)$$

$$\forall x\ \forall y\ (S(x) \times y = (x \times y) + y)$$

Au bout du compte

0, S, $+$, $\times$, $=$

8 axiomes de l'égalité
3 axiomes (dont un schéma) : 3, 4, 5 de Peano
4 axiomes de l'addition et de la multiplication

Exercice : démontrer $\forall y\ (y + 0 = y)$?

$0 + 0 = 0$

Si $x + 0 = x$ alors $S(x) + 0 = S(x + 0)$ et $S(x + 0) = S(x)$ donc $S(x) + 0 = S(x)$

Et ensuite ?

Exercice : démontrer $\forall y\ (y + 0 = y)$?

$0 + 0 = 0$
Si $x + 0 = x$ alors $S(x) + 0 = S(x + 0)$ et $S(x + 0) = S(x)$ donc $S(x) + 0 = S(x)$

Et ensuite ?

La classe des z tels que $z + 0 = z$ contient 0 et close par successeur
Ou alors

$$0 + 0 = 0 \Rightarrow \forall x\ (x + 0 = x \Rightarrow S(x) + 0 = S(x)) \Rightarrow \forall y\ (y + 0 = y)$$

Axiome 5 = axiome de récurrence

Une question légitime

Pourquoi $+$ et $\times$ et pas $\uparrow$

Parce que $\uparrow$ (et toutes les fonctions calculables) est définissable

Mais pas $\times$, si $+$ uniquement

Une autre question légitime

Pourquoi 3, 4 et 5 ?

Une variante avec un prédicat N qui caractérise les entiers

$$\forall c\ (0 \epsilon c \Rightarrow \forall x\ (x \epsilon c \Rightarrow S(x) \epsilon c) \Rightarrow \forall y\ y \epsilon c)$$

$$\forall c\ (0 \epsilon c \Rightarrow \forall x\ (x \epsilon c \Rightarrow S(x) \epsilon c) \Rightarrow \forall y\ ({\color{red}N(y) \Rightarrow}\ y \epsilon c))$$

Dans ce cas

$$N(0)$$

$$\forall x\ (N(x) \Rightarrow N(S(x)))$$

Axiomes 1 et 2

Les 2^2 variantes de l'arithmétique de Peano

Avec κ / sans κ, avec N / sans N

La formulation le plus courante (PA) : sans κ, sans N
La formulation originale de Peano : avec κ, avec N

VI. La théorie des ensembles

La théorie naïve des ensembles

Dans la théorie des classes : deux sortes d'objets
ϵ : à gauche un individu (ι) à droite une classe (κ)

Mais on veut aussi des ensembles d'ensembles : une seule sorte
$\in$
Schéma de compréhension : pour chaque A (possiblement contenant $\in$), un axiome

$$\overline{\forall}\ \exists E \forall y\ (y \in E \Leftrightarrow A)$$

Inventée de nombreuses fois : Cantor, Frege...

Le paradoxe de Russell (1902)

Mais

$$\exists R \forall y \ (y \in R \Leftrightarrow \neg y \in y)$$

$$R \in R \Leftrightarrow \neg R \in R$$

Si $R \in R$, alors $\neg R \in R$, donc $\perp$
Donc $\neg R \in R$, donc $R \in R$, donc $\perp$

La théorie des ensembles et la théorie des types

Deux principes :

- n'importe quel prédicat définit un ensemble
- n'importe quel prédicat s'applique à n'importe quel ensemble

Abandon du premier : théorie des ensembles (Zermelo, 1908)
Abandon du second : théorie des types (Russell, 1903) : plusieurs sortes (types : ι, κ...)

La théorie des ensembles de Zermelo

Quatre cas particuliers du schéma de compréhension

Paire :

$$\forall x \forall y \exists z \forall w \ (w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y))$$

Réunion :

$$\forall x \exists z \forall w \ (w \in z \Leftrightarrow (\exists v \ (w \in v \wedge v \in x)))$$

Parties :

$$\forall x \exists z \forall w \ (w \in z \Leftrightarrow (\forall v \ (v \in w \Rightarrow v \in x)))$$

Sous-ensemble (séparation, compréhension restreinte) :

$$\overline{\forall} \ \forall x \exists z \forall w \ (w \in z \Leftrightarrow (w \in x \wedge A))$$

À nouveau : classes ou non

De l'existence à l'expression : la skolémisation

$$\forall x \exists z \forall w \ (w \in z \Leftrightarrow (\forall v \ (v \in w \Rightarrow v \in x)))$$

$\mathcal{P}$

$$\forall x \forall w \ (w \in \mathcal{P}(x) \Leftrightarrow (\forall v \ (v \in w \Rightarrow v \in x)))$$

L'axiome d'extensionalité

$$\forall E \forall F \; ((\forall x \; (x \in E \Leftrightarrow x \in F)) \Rightarrow E = F)$$

Pas de paradoxe de Russell

$$\exists R \forall y \ (y \in R \Leftrightarrow \neg y \in y)$$

Pourquoi ?

Pas d'ensemble de tous les ensembles

Si un ensemble de tous les ensembles : le schéma du sous-ensemble devient le schéma de compréhension

$$\overline{\forall}\ \forall x \exists z \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow (w \in x \wedge A))$$

$$\forall x \exists z \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow (w \in x \wedge \neg w \in w))$$

En skolémisant :

$$\forall x \forall w\ (w \in C(x) \Leftrightarrow (w \in x \wedge \neg w \in w))$$

$$C(x) \in C(x) \Leftrightarrow (C(x) \in x \wedge \neg C(x) \in C(x))$$

Si $C(x) \in C(x)$, alors $\neg C(x) \in C(x)$, donc $\perp$
Donc $\neg C(x) \in C(x)$
Si $C(x) \in x$, alors $C(x) \in C(x)$, donc $\perp$
Donc $\neg C(x) \in x$

Définir les entiers en théorie des ensembles

Trois définitions possibles : Cantor - Peano - Von Neumann

Cantor :
Un axiome qui énonce l'existence d'un ensemble infini B
Cardinaux finis dans B
3 est l'ensemble de tous les ensembles de trois éléments de B
Éléments de l'ensemble des parties de l'ensemble des parties de B

Peano :

Un axiome qui énonce l'existence d'un ensemble infini B

S injection non surjective de B dans B, 0 un élément qui n'est pas dans l'image de S

Von Neumann :

n est l'ensemble des entiers strictement inférieurs à n

$0 = \varnothing$, $1 = \{\varnothing\}$, $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$...

Besoin d'un axiome pour l'existence de l'ensemble $\mathbb{N}$

Toujours besoin d'un axiome énonçant l'existence d'un ensemble infini

Les fonctions

Les fonctions comme graphes : ensembles de couples

La théorie des types

Finalement distinguer les individus et les classes une bonne idée
Langage à plusieurs sortes d'objets

Mais aussi des ensembles d'ensembles, des ensembles d'ensembles d'ensembles, etc.

Non 2 mais une infinité de sortes, appelées types
ι, $\mathcal{P}(\iota)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\iota))$... (aussi notés 0, 1, 2...)
$\in_n$: en argument un terme de sorte n et un terme de sorte $n+1$

Pas de paradoxe de Russell

$$\exists R \forall y \; (y \in R \Leftrightarrow \neg y \in_{\boldsymbol{n}} y)$$

Pourquoi ?

Les entiers en théorie des types

Cantor, Peano
mais pas Von Neumann ($\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$)

De nombreuses autres variantes

En théorie des ensembles et en théorie des types (de Russell)
Ensembles : primitifs, fonctions : ensembles

Autre solution :
Fonctions : primitives, ensembles : fonctions caractéristiques

Laquelle de la notion d'ensemble et de fonction est la plus primitive ?

La prochaine fois

La notion de modèle